

~ Baccalauréat S Liban 11 juin 2009 ~

**EXERCICE 1**

**3 points**

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.  
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.  
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par  $A$  et  $B$  deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité  $p$ .

On sait que  $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$  et  $p(\bar{A}) = \frac{3}{5}$ .

La probabilité de l'évènement  $B$  est égale à :

- a.  $\frac{2}{5}$                       b.  $\frac{2}{3}$                       c.  $\frac{3}{5}$                       a.  $\frac{1}{2}$

2. On note  $X$  une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,04$ .

On rappelle que pour tout réel  $t$  positif, la probabilité de l'évènement  $(X \leq t)$ , notée  $p(X \leq t)$ , est donnée par  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

La valeur approchée de  $p(X > 5)$  à  $10^{-2}$  près par excès est égale à :

- a. 0,91                      b. 0,18                      c. 0,19                      d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à  $\frac{1}{10}$  ; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à  $\frac{9}{10}$ .

Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

- a.  $\frac{9}{10}$                       a.  $\frac{27}{40}$                       a.  $\frac{3}{4}$                       a.  $\frac{27}{28}$

**EXERCICE 2**

**8 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe  $(\mathcal{C})$  représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

**Partie A**

1. a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- b. Montrer que la droite (D) d'équation  $y = \frac{1}{3}x$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$ . Tracer (D).
- c. Étudier la position relative de (D) et de  $(\mathcal{C})$ .
- d. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$ .

- e. En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2. a. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
Montrer que pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$ .
- b. En déduire les variations de la fonction  $f$ .

**Partie B**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On appelle  $d_n$ , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite (D) d'équation  $y = \frac{1}{3}x$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = n$ .

1. Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$ .
2. On admet que pour tout réel  $x$ ,  $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ .  
Montrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $d_n \leq 1$ . La suite  $(d_n)_{n \geq 1}$  est-elle convergente ?

**Partie C**

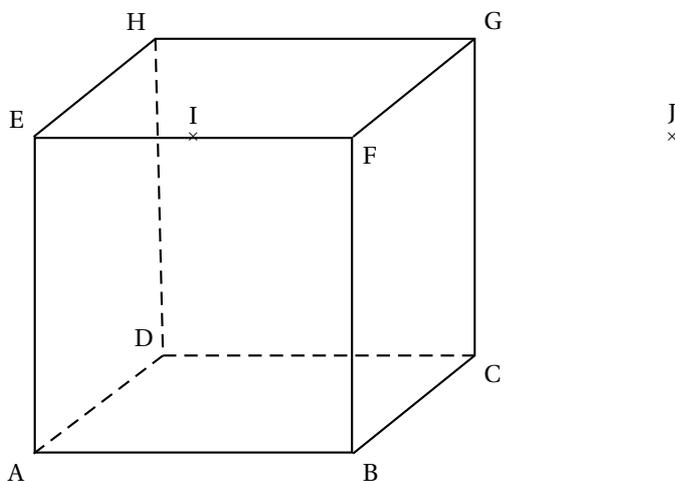
Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe  $(\mathcal{C})$ . On note (T) la tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Soient  $M$  et  $N$  deux points de la courbe  $(\mathcal{C})$  d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite  $(MN)$  est parallèle à la droite (T).

**EXERCICE 3****4 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .



1. a. Déterminer les coordonnées des points I et J.

- b. Vérifier que le vecteur  $\overrightarrow{DJ}$  est un vecteur normal au plan (BGI).
  - c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
  - d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).
2. On note  $(\Delta)$  la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
- a. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ .
  - b. Montrer que la droite  $(\Delta)$  passe par le centre K de la face ADHE.
  - c. Montrer que la droite  $(\Delta)$  et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées  $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ .
  - d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

**EXERCICE 4****5 points****Enseignement obligatoire**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \overline{z_A} \quad \text{et} \quad z_C = -3.$$

**Partie A**

1. Écrire les nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

**Partie B**

Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{1}{3}iz^2$ .

On note  $O', A', B'$  et  $C'$  les points respectivement associés par  $f$  aux points O, A, B et C.

1.
  - a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points  $A', B'$  et  $C'$ .
  - b. Placer les points  $A', B'$  et  $C'$ .
  - c. Démontrer l'alignement des points O, A et  $B'$  ainsi que celui des points O, B et  $A'$ .
  - d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note  $G'$  le point associé à G par  $f$ .  
Déterminer les affixes des points G et  $G'$ .  
Le point  $G'$  est-il l'isobarycentre des points  $O', A', B'$  et  $C'$  ?
2. Démontrer que si  $M$  appartient à la droite (AB) alors  $M'$  appartient à la parabole d'équation  $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$ . (On ne demande pas de tracer cette parabole)

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel  $n$  dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que  $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$ .

**Partie A**

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2009^2$  par 16.
2. En déduire que  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$ .

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2009^2 - 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$ .

1.
  - a. Démontrer que  $u_0$  est divisible par 5.
  - b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)].$$

- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ .
2.
  - a. Vérifier que  $u_3 = 2009^{250} - 1$  puis en déduire que  $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$ .
  - b. Démontrer alors que  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$ .

**Partie C**

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que  $2009^{8001} - 2009$  est divisible par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

## ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

## Exercice 2

