Baccalauréat S – Liban – 11 juin 2009
Corrigé

Exercice 1 — 3 points

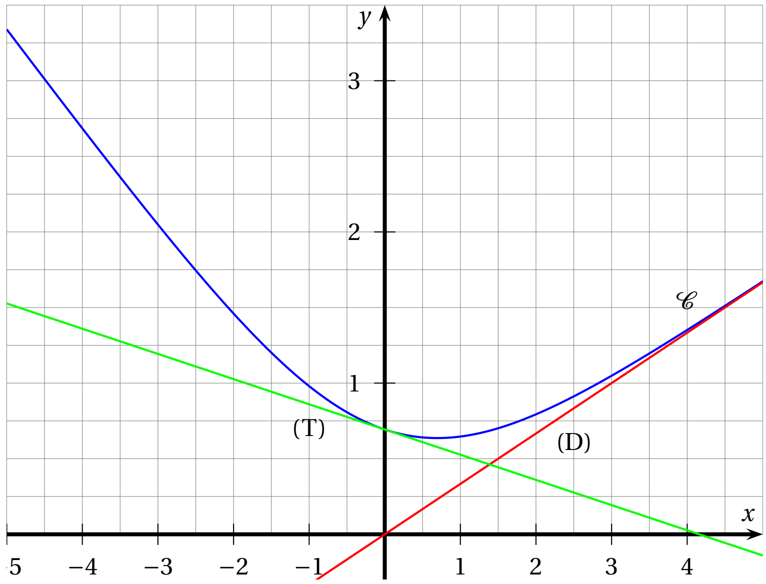
Bien que cela ne soit pas demandé dans l'énoncé, les affirmations sont ici démontrées.

1. On a $p(\overline{A}) = \dfrac{3}{5}$, donc $p(A) = \dfrac{2}{5}$. De plus A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
   On a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) = p(B) \times \big(1 - p(A)\big) + p(A)$
   On en déduit : $p(B) = \dfrac{p(A \cup B) - p(A)}{1 - p(A)} = \dfrac{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \dfrac{2}{3}$. La réponse correcte est donc **b.**.

2. On a $p(X > 5) = 1 - p(X \leqslant 5) = 1 - \displaystyle\int_0^5 0,04\mathrm{e}^{-0,04x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0,04x}\right]_0^5 = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0,04\times 5} - \mathrm{e}^0\right) = \mathrm{e}^{-0,2} \approx 0,82$.
   La bonne réponse est donc la proposition **d.**.

3. Soit C l'événement : « je sors mon chien » et P l'événement "« il pleut ». P et $\overline{P}$ forment une partition de l'univers, donc j'utilise la formule des probabilités totales : $p(C) = p_P(C) \times p(P) + p_{\overline{P}}(C) \times p(\overline{P}) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{28}{40} = \dfrac{7}{10}$
   On en déduit $p_C\left(\overline{P}\right) = \dfrac{p\left(\overline{P} \cap C\right)}{p(C)} = \dfrac{p_{\overline{P}}(C) \times p\left(\overline{P}\right)}{p(C)} = \dfrac{\frac{9}{10} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{27}{28}$. La bonne réponse est donc **d.**.

Exercice 2 — 8 points



Partie A

1. a. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   b. Comme $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = 0$, on en déduit que la droite (D) est asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

   c. Comme $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \{-x\} > 0$, on a $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ et donc $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) > 0$, dont on déduit que l'asymptote (D) est en dessous de la courbe ($\mathscr{C}$) sur $\mathbb{R}$.

   d. Soit x un réel. On a $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \ln(\mathrm{e}^x) + \dfrac{1}{3}x = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - x + \dfrac{1}{3}x$
   soit $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \dfrac{2}{3}x$

   e. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 1 = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(\mathrm{e}^x + 1) = 0$ et comme par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2. a. f est dérivable en tant que composée d'une fonction $x \longmapsto e^x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,où la fonction ln est dérivable : cette composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire que l'on y ajoute pour obtenir $f(x)$ étant elle même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est : $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3e^x}{3(e^x+1)} - \dfrac{2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \dfrac{3e^x - 2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \dfrac{e^x-2}{3(e^x+1)}$.

b. Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur, et $e^x - 2 > 0 \iff x > \ln(2)$. On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \ln 2]$ puis strictement croissante sur $[\ln 2 ; +\infty[$.

Partie B

1. On a démontré dans la **partie A** que $f(x) - \dfrac{1}{3} = \ln(1+e^{-x}) > 0$ pour tout x réel, donc l'aire entre $(\mathscr{C})$ et (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$, pour n entier naturel non nul, est $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)\,dx$.

2. Si on a x, $\ln(1+e^{-x}) \leqslant e^{-x}$, alors $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)\,dx \leqslant \int_0^n e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n = 1 - e^{-n}$
Comme pour tout n on a $e^{-n} \geqslant 0$, on a bien, pour tout n naturel $d_n \leqslant 1$
La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est donc majorée. De plus :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n+1} - d_n &= \int_0^{n+1} \ln\left(1+e^{-x}\right)\,dx - \int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)\,dx \\ &= \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-x}\right)\,dx \end{aligned}$$

et l'intégrale entre n et $n+1$ d'une fonction positive (comme établi à la partie A) étant positive, on a pour tout n non nul $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$ donc $d_{n+1} \geqslant d_n$ et donc la suite est croissante.
Une suite croissante et majorée étant nécessairement convergente, on en déduit que c'est le cas de $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie C

1. Le coefficient directeur de (T) est donné par $f'(0)$. C'est donc $f'(0) = \dfrac{e^0 - 2}{3(e^0+1)} = \dfrac{-1}{6}$.

2. Soit x un réel non nul, considérons M et N les deux points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.
L'ordonnée de M est donc $y_M = f(x) = \ln(e^x+1) - \dfrac{2}{3}x$.
Pour calculer celle de N, on va utiliser l'autre forme de f : $y_N = f(-x) = \ln\left(1+e^{-(-x)}\right) + \dfrac{1}{3}(-x) = \ln(e^x+1) - \dfrac{1}{3}x$.
Le coefficient directeur de (MN) est donc : $\dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \dfrac{\left[\ln(e^x+1) - \dfrac{2}{3}x\right] - \left[\ln(e^x+1) - \dfrac{1}{3}x\right]}{x-(-x)} = \dfrac{-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}x}{2x} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{-\dfrac{1}{3}x}{2x} = -\dfrac{1}{6}$
Les droites (MN) et (T) ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

Exercice 3

4 points

1. a. Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$, car $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Le point J a pour coordonnées $(2 ; 0 ; 1)$

b. On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{DJ}$: $(2 ; -1 ; 1)$; $\overrightarrow{BG}$: $(0 ; 1 ; 1)$ et $\overrightarrow{BI}$: $\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont clairement non colinéaires.
On a finalement $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 2 \times \dfrac{-1}{2} + 0 + 1 = 0$
Le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan.

c. On en déduit que le plan (BGI) a une équation cartésienne de la forme : $2x - y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$. d étant tel que l'équation du plan est vérifiée par les coordonnées de B (car B est un point du plan).
Donc $2 \times 1 - 0 + 0 + d = 0$ soit $d = -2$, l'équation du plan est donc $2x - y + z - 2 = 0$.

d. On applique la formule du cours : la distance d est $d = \dfrac{|2 \times 1 - 0 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

2. a. La droite (Δ) est dirigée par $\overrightarrow{DJ}$, de coordonnées $(2 ; -1 ; 1)$ et passant par F, de coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$, elle admet donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$

b. Le plan de la face ADHE est le plan d'équation $x = 0$, et le point de (Δ) d'abscisse 0 est le point de paramètre $-\dfrac{1}{2}$, ce point a pour coordonnées $\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$, c'est bien le centre de la face ADHE, car c'est le milieu du segment [AH] H étant le point de coordonnées $(0;1;1)$ et A l'origine du repère. L'intersection de (Δ) et de la face ADHE est bien le centre de celle ci, le point K.

c. Le point L, de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$ est le point de (Δ) de paramètre $-\dfrac{5}{6}$.

De plus, on a $2\times\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}-2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{6}-2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}-2=\dfrac{6}{3}-2=0$ les coordonnées de L sont donc sont solutions de l'équation de (BGI) le point L est aussi sur (BIG), c'est donc bien l'intersection de la droite et du plan.

d. On a $\overrightarrow{\text{LB}}$ de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{1}{6}\,;\,-\dfrac{5}{6}\right)$ et $\overrightarrow{\text{GI}}$ de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-1\,;\,0\right)$

Donc $\overrightarrow{\text{LB}}\cdot\overrightarrow{\text{GI}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-1}{2}+\dfrac{-1}{6}\times(-1)+\dfrac{-5}{6}\times 0=\dfrac{-1}{6}+\dfrac{1}{6}=0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc (BL) et (GI) sont perpendiculaires (orthogonales et coplanaires) donc (BL) est la hauteur issue de B dans BIG.

$\overrightarrow{\text{BG}}$ a pour coordonnées $(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\text{IL}}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,-\dfrac{1}{6}\right)$.

Donc $\overrightarrow{\text{IL}}\cdot\overrightarrow{\text{BG}}=\dfrac{1}{6}\times 0+\dfrac{1}{6}\times 1+\dfrac{-1}{6}\times 1=\dfrac{-1}{6}+\dfrac{1}{6}=0$ là encore les vecteurs sont orthogonaux, donc (IL) et (BI) sont perpendiculaires (orthogonales et coplanaires) donc (IL) est la hauteur issue de I dans BIG.

L est donc l'intersection de deux des hauteurs du triangle BIG, c'est bien l'orthocentre de BGI.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

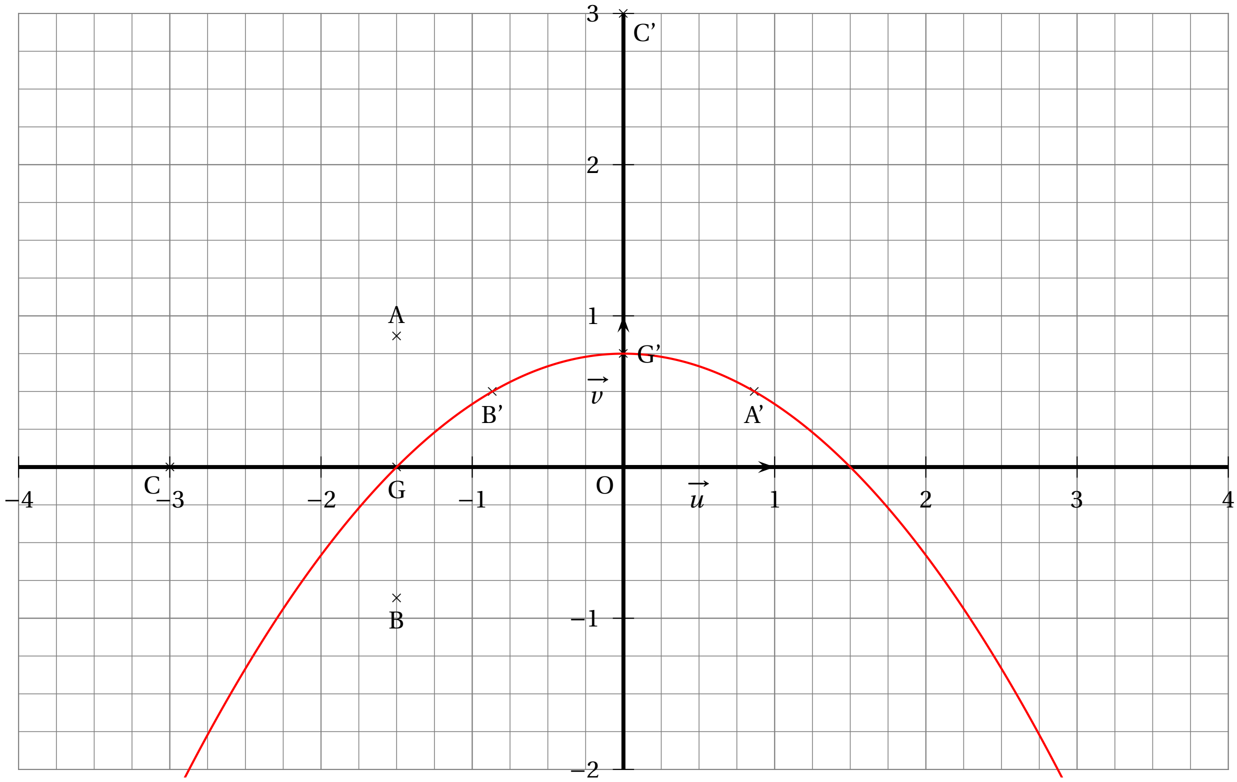
Partie A

1. $z_{\text{A}}=-\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\times\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{3}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

   On a donc $z_{\text{B}}=\overline{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-5\pi}{6}}$

   Enfin, $z_{\text{C}}=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

2. Voici la figure :



3. Posons $Z=\dfrac{z_{\text{C}}-z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}-z_{\text{B}}}=\dfrac{-3-\left(\frac{-3}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{-3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-3}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{-\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\mathrm{i}\sqrt{3}}=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}\times\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{i}\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   On a $|Z|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=1$ et $|Z|=\dfrac{\text{BC}}{\text{BA}}$, donc BA = BC : le triangle est isocèle en B.

   De plus $\arg(Z)\equiv\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$, donc l'angle $\left(\overrightarrow{\text{BC}}\,;\,\overrightarrow{\text{BA}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$: le triangle BAC, isocèle en B a $\dfrac{\pi}{3}$ pour angle principal : le triangle est donc équilatéral.

Partie B

1. **a.** On a $\dfrac{1}{3}\mathrm{i} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, donc :

$z_{\mathrm{A}'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_{\mathrm{A}}^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$z_{\mathrm{B}'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_{\mathrm{B}}^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-5\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-7\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

$z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_{\mathrm{C}}^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times (-3)^2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

b. Voir la figure.

c. A et B$'$ ont le même argument, donc O, A et B$'$ sont alignés (O est à l'extérieur du segment [AB$'$]).
B et A$'$ ont des arguments dont la différence est π, donc les points O, B et A$'$ sont alignés (O étant cette fois un point du segment [A$'$B])

d. $z_{\mathrm{G}} = \dfrac{0 + z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}}}{4} = \dfrac{-\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - 3}{4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

Et donc : $z_{\mathrm{G}'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{i} \times z_{\mathrm{G}}^2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{9}{4}\mathrm{i} = \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$

Le point G$'$ n'est pas l'isobarycentre des points O$'$ A$'$, B$'$ et C$'$, car O$'$ = O et $\dfrac{0 + z_{\mathrm{A}'} + z_{\mathrm{B}'} + z_{\mathrm{C}'}}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} + 3\mathrm{i}}{4} = \dfrac{4\mathrm{i}}{4} = \mathrm{i} \neq z_{\mathrm{G}}$

2. Si M appartient à la droite (AB) alors son affixe z est de la forme $z = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}x, x \in \mathbb{R}$ et donc son image M' aura pour affixe $z' = \dfrac{1}{3}\mathrm{i} \times \left(-\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}x\right)^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{i} \times \left(\dfrac{9}{4} - 3\mathrm{i}x - x^2\right) = x + \mathrm{i} \times \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}x^2\right)$ On a donc $\Re(z') = x$ et $\Im(z') = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}x^2$, donc M' est bien sur la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.