

Corrigé Nouvelle-Calédonie série S mars 2009

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. L'écriture complexe de cette rotation est $z' - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$.
Pour $z = z_B$, on obtient donc :

$$z' = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}(3 + 4i - 1) = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 4i) = \dots = z_D.$$

L'image du point B est bien le point D.

- b. Comme A est le centre d'une rotation qui transforme B en D, B et D sont sur un même cercle de centre A ; le rayon est AB.

$$AB = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

2. a. L'écriture complexe de cette homothétie est $z' - z_B = \frac{3}{2}(z - z_B)$.

$$\text{Pour } z = z_A, \text{ on obtient donc : } z_F = 3 + 4i + \frac{3}{2}(1 - 3 - 4i) = -2i.$$

- b. Calculons l'affixe du milieu de [CD] : $\frac{z_C + z_D}{2} = \dots = -2i$, on trouve bien z_F !

$$\text{c. } \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) + 2i}{1 + 2i} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 + 2i} = \sqrt{3} \frac{(2 - i)(1 - 2i)}{5} = \sqrt{3} \frac{-5i}{5} = -i\sqrt{3}.$$

En écrivant les modules et arguments, on obtient donc la forme exponentielle :

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Mais } \arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

Les droites (FA) et (FC) sont donc orthogonales en F ; comme on a déjà vu que F est le milieu de [DC], (AF) est bien la médiatrice de [DC].

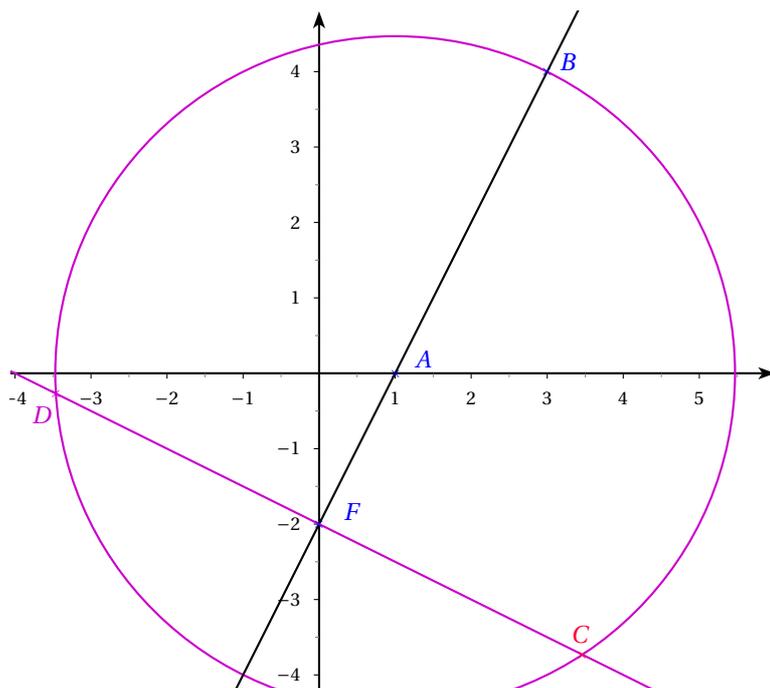
3. D'après la question 1°) :

- D appartient au cercle de centre A qui passe par B (1. b.).

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{2\pi}{3}$: D appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par F (voir la définition de F).

Choisir pour D celui des deux points d'intersection de la droite et du cercle pour lequel l'angle est le bon !

Enfin, C est le symétrique de D par rapport à F (ou l'autre point d'intersection).



EXERCICE 2

5 points

1.
 - a. Les trois points A, B et C sont deux à deux distincts, $\overrightarrow{AB}(-4, 2, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-4, 0, 3)$ ne sont pas colinéaires ($\frac{-4}{-4} \neq \frac{0}{3}$). A, B et C déterminent donc bien un plan.
 - b. On montre que \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC). Nous choisissons bien entendu les deux vecteurs du 1a.
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -12 + 12 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. \vec{n} est bien normal à (ABC).
 - c. Comme \vec{n} est normal à (ABC), une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $3x + 6y + 4z + d = 0$.
Comme, de plus, A appartient au plan, ses coordonnées doivent vérifier l'équation précédente : $12 + d = 0$. D'où le résultat.
 - d. On applique la formule rappelée plus haut :

$$\delta_E = \frac{\left| 2 - 4 + \frac{4}{9} - 12 \right|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{122}{9\sqrt{61}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}$$
2.
 - a. \vec{u} le vecteur de coordonnées $(1; 2; 4/3)$ est directeur de (\mathcal{D}) et \vec{n} est normal à (ABC).
Or, on vérifie aisément $\left(\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{4}{4/3}\right)$ que \vec{u} et \vec{n} sont colinéaires, donc (\mathcal{D}) est orthogonale à (ABC).
De plus, si $t = \frac{-1}{3}$ dans la représentation paramétrique de (\mathcal{D}) , on retrouve les coordonnées de E, donc (\mathcal{D}) passe par E.
 - b. D'après la question précédente, le projeté orthogonal de E sur (ABC) est le point d'intersection de (\mathcal{D}) et (ABC).
Notons (x, y, z) les coordonnées de G.

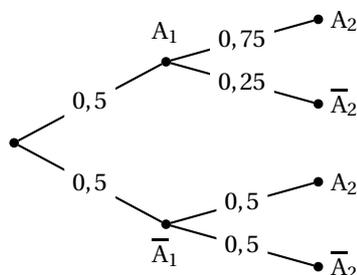
$$\begin{cases} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \\ 3x+6y+4z-12 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \\ 3(1+t)+12t+4(\frac{5}{9} + \frac{4}{3})t-12 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & \frac{4}{3} \\ y & = & \frac{2}{3} \\ z & = & 1 \\ t & = & \frac{1}{3} \end{cases}$$

G a pour coordonnées $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

c. $\delta_E = GE = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{81}} = \sqrt{\frac{244}{81}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}$. Ouf! On retrouve la même valeur que dans le 1. b.!

EXERCICE 3**5 points**

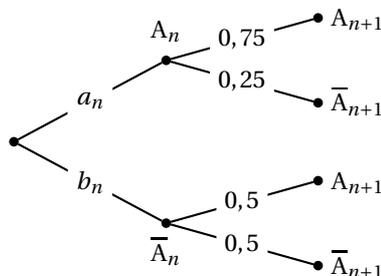
1. $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = 1 - a_1 = \frac{1}{2}$



Avec la formule des probabilités totales : $p(A_2) = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap \overline{A_1})$ donc

$$a_2 = a_1 \times \frac{3}{4} + b_1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \text{ et } b_2 = 1 - a_2 = \frac{3}{8}$$

2. On refait un arbre et on utilise encore la formule des probabilités totales :



$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. $U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}U_n$.

Par définition, (U_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme

$$U_1 = -\frac{1}{6}.$$

b. On en déduit $U_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ puis $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre -1 et 1 , elle converge donc vers 0 . On en déduit que (a_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

d. $a_n \geq 0,6665 \iff \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \geq 0,6665 \iff 6 \left(\frac{2}{3} - 0,6665\right) \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \iff \ln\left(6 \left(\frac{2}{3} - 0,6665\right)\right) \geq (n-1) \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

On obtient finalement : $n \geq 1 + \frac{\ln(4 - 6 \times 0,6665)}{\ln \frac{1}{4}} \geq 5,98$.

Le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geq 0,6665$ est donc 6 .

EXERCICE 4**6 points****Commun à tous les candidats**

1. a. Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} , $f(x)$ est du signe de $x+1$, donc négative si $x < -1$, positive si $x > -1$ et s'annule pour $x = -1$.

$$\text{b. } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{array} \right\} \text{ par composition} \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Si on reprend le schéma précédent en $+\infty$, on obtient la forme indéterminée « $+\infty \times 0$ ». Pour lever l'indétermination, on développe :

$$f(x) = e^{-x} + \frac{x}{e^x} \text{ et on retrouve une limite du cours !}$$

$$\text{Réponse : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

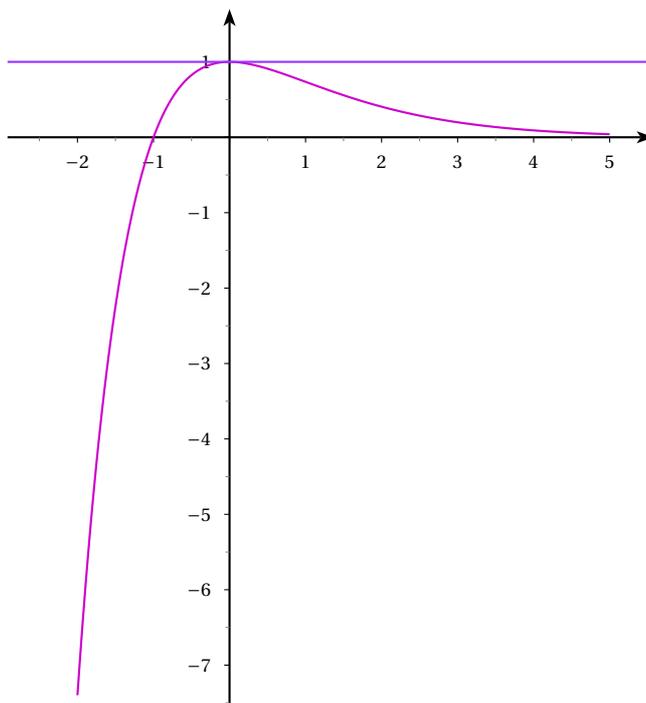
- c. f est obtenue par composition et produit de fonctions usuelles, f est donc bien dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} - (1+x)e^{-x} = -xe^{-x}$$

$f'(x)$ est donc du signe contraire de x et f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Comme la dérivée s'annule une seule fois et en changeant de signe (+ ; -) en 0 , $f(0) = 1$ est un maximum pour f sur \mathbb{R} .

- d. Penser aux éléments caractéristiques de la courbe qui ont été rencontrés dans l'étude et notamment la tangente « horizontale » au point d'abscisse 0 .



2. a. $\forall n \in \mathbb{N}, -1 > n$ et $f(x) \geq 0$ sur $[-1; n]$ d'après la question 1. a.
On intègre donc une fonction positive avec les bornes dans le « bon » ordre, donc pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \geq 0$.
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0$ pour les mêmes raisons que dans la question précédente!
3. a. On pose :
$$\begin{cases} u(x) = 1+x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = e^{-x} \end{cases}$$
Les 4 fonctions u, u', v et v' sont toutes continues sur $[a; b]$, on peut donc intégrer par parties :
$$\int_a^b f(x) dx = \left[-(1+x)e^{-x} \right]_a^b - \int_a^b -e^{-x} dx = (1+a)e^{-a} - (1+b)e^{-b} - \left[e^{-x} \right]_a^b = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.$$
- b. On utilise la question précédente avec $a = -1$ et $b = n$,
$$I_n = (-2-n)e^{-n} + e = -2e^{-n} - \frac{n}{e^n} + e.$$
- c. Avec les mêmes arguments que dans la question 1. b., on trouve
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e.$$
- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x)$ est positive sur $[-1; n]$, donc I_n mesure l'aire du domaine limité par les droites d'équations $x = -1, x = n$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f . Cette limite signifie que cette aire a pour limite e quand n tend vers $+\infty$.
4. On utilise la question 3. a. en posant $a = -1$ et $b = \alpha$.
$$\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e \iff (2-\alpha)e^{-\alpha} + e = e \iff \alpha = -2$$
Ce calcul intégral correspond à un calcul d'aire :
Sur $[-2; -1], f(x) \leq 0$,
l'aire du domaine limité par les droites d'équations $x = -2, x = -1$, l'axe des abscisses et la courbe est donc

$$-\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-1}^{-2} f(x) dx = e$$