

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2010

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, **une ou deux des réponses** proposées sont correctes.

Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.

Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.

Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.

**Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).**

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A :  $\frac{5}{8}$                       B :  $\frac{21}{32}$                       C :  $\frac{11}{32}$                       D :  $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A :  $\frac{105}{248}$                       B :  $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$                       C :  $\frac{21^2}{32^2}$                       D :  $\frac{5^2}{8^2}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

A :  $\frac{1}{3}$                       B :  $\frac{1}{5}$                       C :  $\frac{1}{12}$                       D :  $\frac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.

La probabilité pour qu'exactly 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

A :  $0,35 \times 10^{-2}$  près    B :  $0,85^9$                       C :  $0,85^9 \times 0,15$                       D :  $0,85^9 \times 0,15 \times 10$

### EXERCICE 2

5 points

#### Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1 cm.

#### 1. Restitution organisée de connaissances

Pour  $M \neq \Omega$ , on rappelle que le point  $M'$  est l'image du point  $M$  par la rotation  $r$  de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\theta$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \quad (1) \\ (\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) \quad (2) \end{array} \right.$$

- a. Soient  $z, z'$  et  $\omega$  les affixes respectives des points  $M, M'$  et  $\Omega$ .  
Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.
- b. En déduire l'expression de  $z'$  en fonction de  $z, \theta$  et  $\omega$
2. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $a = 2\sqrt{3} - 2i$  et  $b = 2\sqrt{3} + 2i$ .
- a. Écrire  $a$  et  $b$  sous forme exponentielle.
- b. Faire une figure et placer les points  $A$  et  $B$ .
- c. Montrer que  $OAB$  est un triangle équilatéral.
4. Soit  $C$  le point d'affixe  $c = -8i$  et  $D$  son image par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .  
Placer les points  $C$  et  $D$ .  
Montrer que l'affixe du point  $D$  est  $d = 4\sqrt{3} + 4i$ .
5. Montrer que  $D$  est l'image du point  $B$  par une homothétie de centre  $O$  dont on déterminera le rapport.
6. Montrer que  $OAD$  est un triangle rectangle.

## EXERCICE 2

5 points

### Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1 cm.

#### 1. Restitution organisée de connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

**Propriété 1 :** Toute similitude indirecte qui transforme un point  $M$  d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$  admet une expression complexe de la forme  $z' = a\bar{z} + b$  où  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

**Propriété 2 :** Soit  $C$  un point d'affixe  $c$ . Pour tout point  $D$ , distinct de  $C$ , d'affixe  $d$  et pour tout point  $E$ , distinct de  $C$ , d'affixe  $e$ , on a :

$$\left( \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CE} \right) = \arg\left( \frac{e-c}{d-c} \right) \quad (2\pi).$$

**Question :** Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $c = 3$  et  $d = 1 - 3i$ , et  $\mathcal{S}_1$  la similitude qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M_1$  symétrique de  $M$  par rapport à l'axe  $(O; \vec{u})$  des réels.
- a. Placer les points  $C$  et  $D$  puis leurs images respectives  $C_1$  et  $D_1$  par  $\mathcal{S}_1$ . On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
- b. Donner l'expression complexe de  $\mathcal{S}_1$ .
3. Soit  $\mathcal{S}_2$  la similitude directe définie par :
- le point  $C_1$  et son image  $C'$  d'affixe  $c' = 1 + 4i$  ;
  - le point  $D_1$  et son image  $D'$  d'affixe  $d' = -2 + 2i$ .
- a. Montrer que l'expression complexe de  $\mathcal{S}_2$  est :  $z' = iz + 1 + i$ .
- b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

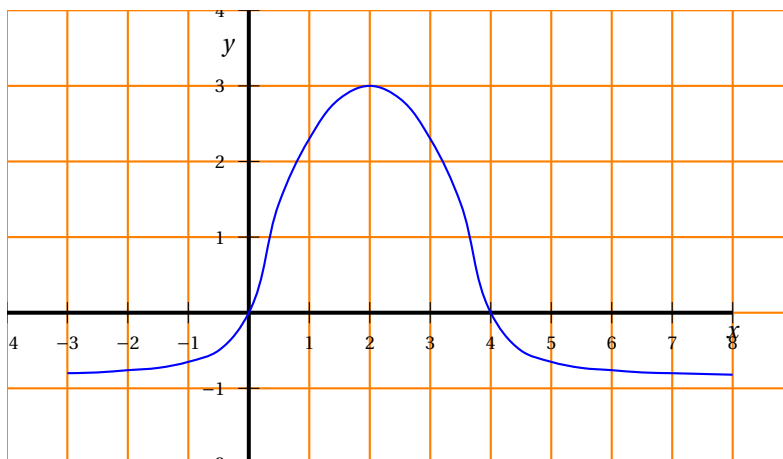
4. Soit  $\mathcal{S}$  la similitude définie par  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ .  
Déterminer l'expression complexe de  $\mathcal{S}$ .
5. On pourra admettre désormais que  $\mathcal{S}$  est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = i\bar{z} + 1 + i.$$

- a. Quelle est l'image de  $C$  par  $\mathcal{S}$  ? Quelle est l'image de  $D$  par  $\mathcal{S}$  ?
- b. Soit  $H$  le point d'affixe  $h$  tel que :  $h - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$ .  
Montrer que le triangle  $CDH$  est équilatéral direct.
- c. Soit  $H'$  l'image de  $H$  par  $\mathcal{S}$ . Préciser la nature du triangle  $C'D'H'$  et construire le point  $H'$  (on ne demande pas de calculer l'affixe  $h'$  du point  $H'$ ).

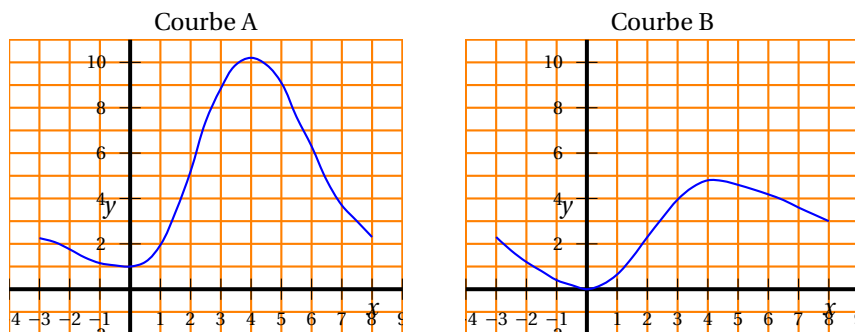
**EXERCICE 3****4 points****Commun à tous les candidats**

On donne la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et continue sur l'intervalle  $I = [-3 ; 8]$ .



On définit la fonction  $F$  sur  $I$ , par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

1.
  - a. Que vaut  $F(0)$  ?
  - b. Donner le signe de  $F(x)$  :
    - pour  $x \in [0 ; 4]$  ;
    - pour  $x \in [-3 ; 0]$ .
 Justifier les réponses.
  - c. Faire figurer sur le graphique donné en **ANNEXE** les éléments permettant de justifier les inégalités  $6 \leq F(4) \leq 12$ .
2.
  - a. Que représente  $f$  pour  $F$  ?
  - b. Déterminer le sens de variation de la fonction  $F$  sur  $I$ . Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de  $f$ .
3. On dispose de deux représentations graphiques sur  $I$ .



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction  $F$ ? Justifier la réponse.

#### EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

##### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = x - x \ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en 0 et  $+\infty$ .
2. Montrer que  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et que  $g'(x) = -\ln x$ .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .

##### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ .

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
  - a. le sens de variation de la suite  $(u_n)$ ;
  - b. la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$ .
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $v_n = \ln(u_n)$ .
  - a. Montrer que  $v_n = n - n \ln n$ .
  - b. En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
  - c. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est bornée.
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

## FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

## Exercice 3

Commun à tous les candidats

