Bac S – La Réunion – juin 2010

EXERCICE 1 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1) a) Étudier le sens de variation de la fonction f.

b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

c) Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

d) Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.

e) À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

2) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.

2) Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ». Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\frac{7}{18}$.

3) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

4) À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1) a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2) Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.

3) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

<u>EXERCICE 3</u> : (5 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

<u>Partie A</u> :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif, $xf'(x) - f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

1) Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ vérifie :

pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

2) En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifient la condition (E).

3) Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

<u>Partie B</u> :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

2) a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

<u>EXERCICE 4</u> : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

<u>Partie I</u> : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a)\ [2\pi]$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$.

<u>Partie II</u> :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère le point A d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 1 - \mathrm{i}}{z}$.
Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B', image du point B d'affixe i.

b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.

3) Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?