

La Réunion 2010 — BAC S — Corrigé maths

J.-P. W.

1^{er} juillet 2010

Exercice 1 (commun)

6 points

Partie A

- 1) a) Sur $] -1; +\infty[$, la fonction affine $(x \mapsto x + 1)$ est strictement croissante et est à valeurs dans $]0; +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction \ln est strictement croissante, alors (par composition, puis somme avec la constante 1)

f est strictement croissante sur $] -1; +\infty[$.

- b) • Limite en -1

$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$, par composition et somme avec 1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, alors (composition et somme avec 1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- 2) a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} -x = 1$, alors (par somme)

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ (croissance comparée),
alors (par composition)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

$$\forall x > -1, g(x) = (1+x) \underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}}_{\rightarrow 0 \text{ en } +\infty} - \frac{x}{1+x} \right)}_{\rightarrow -1 \text{ en } +\infty}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(1+x) = -\infty$$

c) g est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et,

$$\forall x > -1, g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

Puisque $x > -1$, $1+x > 0$ et

- sur $] -1; 0[$, $-x > 0$, alors $g'(x) > 0$:
la fonction g est strictement croissante sur $] -1; 0[$;
- sur $] 0; +\infty[$, $-x < 0$, alors $g'(x) < 0$:
la fonction g est strictement décroissante sur $] 0; +\infty[$.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0 $-$
g			$-\infty \nearrow 1 \searrow -\infty$

d) g est continue (car dérivable) sur $] -1; 0[$ et $0 \in \left] \lim_{x \rightarrow -1} g(x); g(0) \right]$

alors (théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $g(x) = 0$ possède au moins une solution dans $] -1; 0[$, g étant de plus strictement monotone (croissante) sur $] -1; 0[$ cette solution est unique. On la note α et $\alpha \in] -1; 0[$.

De même,
 g continue, strictement monotone (décroissante) sur $[0; +\infty[$ et
 $0 \in \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0) \right]$, alors l'équation $g(x) = 0$ a une, et une seule
solution β dans $[0; +\infty[$ et, puisque $g(2) > 0$ et $0 > g(3)$, $\beta \in [2; 3]$.

e) De c) et d) on déduit le signe de $g(x)$

x	-1	α	β	$+\infty$	
signe de $g(x)$	-	0	+	0	-

Le signe de $g(x) = f(x) - x$ indique la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à D :

- \mathcal{C}_f est au-dessous de D sur $] - 1; \alpha[$ et sur $] \beta; +\infty[$;
- \mathcal{C}_f est au-dessus de D sur $] \alpha; \beta[$.

Partie B

1) On considère la proposition dépendant de l'entier naturel n ,

$$\mathcal{P}(n) : \langle 2 \leq u_n \leq \beta \rangle$$

On raisonne par récurrence :

Initialisation $\mathcal{P}(0) : \langle 2 \leq u_0 \leq \beta \rangle$ est vraie car $u_0 = 2$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(n) : \langle 2 \leq u_n \leq \beta \rangle$ est vraie. (H.R.)

Démontrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1) : \langle 2 \leq u_{n+1} \leq \beta \rangle$ est vraie.

Puisque, **Partie A, question 1) a)**, f est croissante sur $] - 1; +\infty[$:

$$\text{Si } 2 \leq u_n \leq \beta \text{ alors } f(2) \leq f(u_n) \leq f(\beta)$$

$$\text{alors } 1 + \ln(3) \leq u_{n+1} \leq f(\beta)$$

comme $2 < 1 + \ln(3)$ et $g(\beta) = f(\beta) - \beta = 0$, on a $f(\beta) = \beta$,

$$\text{alors } 2 \leq u_{n+1} \leq \beta$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq \beta$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [2; \beta]$ et g positive sur $[2; \beta]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée alors elle converge.

Exercice 2 (commun)

4 points

Partie I

- 1) Le dé est équilibré et possède deux faces noires sur 6, la probabilité d'obtenir une face noire lors d'un lancer est $\frac{1}{3}$.

Les deux lancers sont indépendants, alors la probabilité d'obtenir deux faces noires à l'issue du jeu est

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

- 2) L'événement C est la réunion des événements, deux à deux incompatibles : « les deux faces sont noires », « les deux faces sont vertes », « les deux faces sont rouges », alors

$$P(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

- 3) « les deux faces sont de couleurs différentes » est l'événement contraire de C , alors sa probabilité est

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

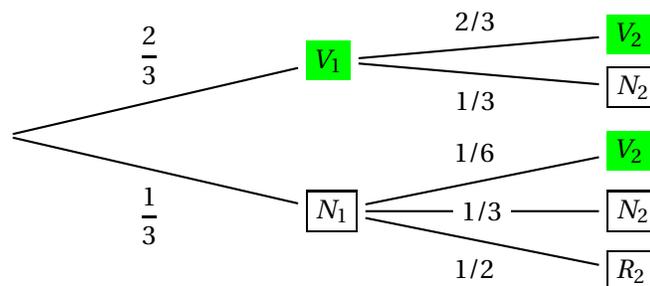
- 4) Considérons l'événement V : « les deux faces sont vertes », on a $V \subset C$ donc $V \cap C = V$. Alors

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{P(V)}{P(C)} = \frac{1}{36} \times \frac{18}{7} = \frac{1}{14}$$

Partie II

- 1) a) Considérons les événements V_1 : « la face obtenue au premier lancer est verte », V_2 : « la face obtenue au second lancer est verte »,

...



-
- b)** Sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer, on lance le dé B au deuxième lancer et la probabilité d'obtenir alors une face verte est :

$$P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}$$

- 2)** La probabilité d'obtenir deux faces vertes :

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

- 3)** D'après la formule des probabilités totales :

$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \dots = \frac{1}{2}$$

Exercice 3 (commun)

5 points

Partie A1) Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ alors la fonction

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

— quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ — est dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = xg(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = g(x) + xg'(x)$$

Si f vérifie la condition (E), alors

$$\forall x > 0, \quad xf'(x) - f(x) = x^2 e^{2x} \quad (E)$$

alors

$$\forall x > 0, \quad x(g(x) + xg'(x)) - xg(x) = x^2 g'(x) = x^2 e^{2x}$$

alors (puisque $\forall x > 0, x^2 \neq 0$)

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = e^{2x}$$

2) D'après la question précédente, si f vérifie la condition (E), alors g est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $(x \mapsto e^{2x})$, alors

$$\begin{aligned} g & :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f & :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = xg(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + kx \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Réciproquement, on doit s'assurer par le calcul que toute fonction f de la forme ci-dessus est définie, dérivable sur $]0; +\infty[$ et vérifie la condition (E).

-
- 3) f est une fonction de la forme précédente telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ si, et seulement si, $\frac{1}{4}e + \frac{1}{2}k = 0$ c'est-à-dire $k = -\frac{e}{2}$.

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2}x(e^{2x} - e)$$

Partie B

1) $\forall x \in [0; +\infty[, h(x) = \frac{1}{2}x(e^{2x} - e)$

alors, pour $x > 0$, $h(x)$ est du signe de $e^{2x} - e^1$

alors, par stricte croissance de la fonction exp sur $[0; +\infty[$,

$$e^{2x} > e^1 \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$$

On en déduit le tableau de signe de $h(x)$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
signe de x	0	+	+	
signe de $e^{2x} - e$		-	0	+
signe de $h(x)$	0	-	0	+

- 2) a) Pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$, on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$
 les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $[0; \frac{1}{2}]$, on peut alors effectuer une intégration par parties selon la formule :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{4}e - \left[\frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Alors, par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx - \frac{e}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x dx \\ &= \frac{1}{8} - \frac{e}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{e}{16} = \frac{2-e}{16}\end{aligned}$$

- b)** Puisque h est négative sur $[0; \frac{1}{2}]$, l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au-dessus de la courbe \mathcal{C} est

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -h(x) dx = \frac{e-2}{16}$$

Exercice 4 (non spé)

5 points

Partie I : Restitution organisée de connaissancesSoit a, b, c les affixes respectives des points A, B, C tels que $a \neq b$ et $a \neq c$.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) && \text{relation de Chasles} \\ &= \arg(c - a) - \arg(b - a) && \text{pré requis} \\ &= \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) && \text{propriété des arguments}\end{aligned}$$

Partie II :

- 1) a) Soit
- b'
- l'affixe du point
- B'
- , image du point
- B
- d'affixe
- i
- .

Par définition

$$b' = \frac{i - 1 - i}{i} = \frac{-1}{i} = \frac{i^2}{i} = i$$

- b) Soit
- $z \neq 0$
- .

Si $z' = 1$, alors $z = z - 1 - i$, alors $0 = -1 - i$ IMPOSSIBLE!

Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, z' \neq 1$$

- 2) Soit
- $z \neq 0$
- .

$$|z'| = 1 \iff \left| \frac{z - 1 - i}{z} \right| = 1 \iff |z - 1 - i| = |z| \iff |z - (1 + i)| = |z - 0|$$

Par interprétation géométrique du module d'un nombre complexe :

$$|z_B - z_A| = AB$$

Ainsi

$$|z'| = 1 \iff AM = OM \iff M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [OA]$$

- 3) Soit
- $z \neq 0$
- .

$$z' \text{ est réel} \iff \begin{cases} z = 1 + i & \text{ou} \\ \arg(z') = \arg\left(\frac{z - 1 - i}{z}\right) = \arg\left(\frac{1 + i - z}{0 - z}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'après **Partie I**,

$$z' \text{ est réel} \iff \begin{cases} M = A & \text{ou} \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z' \text{ est réel} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{OM} \neq \vec{0} \text{ sont colinéaires} \iff M \in (OA) \text{ et } M \neq O$$

Exercice 4 (spécialité)

5 points

Partie I : Restitution organisée de connaissancesSoit a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D , où $a \neq c$ et $b \neq d$.**Condition nécessaire** Si s est une similitude directe d'écriture complexe $z' = \alpha z + \beta$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$, alors :

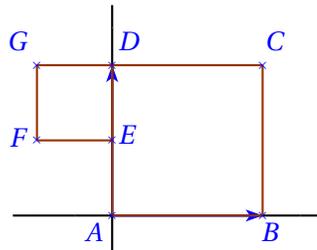
$$\begin{cases} b = \alpha a + \beta \\ d = \alpha c + \beta \end{cases}$$

— par différence membre à membre —

$$b - d = \alpha(a - c)$$

Puisque $a \neq c$ et $b \neq d$, nécessairement

$$\alpha = \frac{b-d}{a-c} \neq 0 \quad \text{puis} \quad \beta = b - \alpha a = \frac{d(a-c) - a(b-d)}{a-c} = -\frac{ab+cd}{a-c}$$

Si s existe, alors elle est unique.**Condition suffisante** On vérifie que $z' = \frac{b-d}{a-c}z - \frac{ab+cd}{a-c}$ est l'écriture complexe d'une similitude directe s du plan qui transforme A en B et C en D .D'où l'existence de s .**Partie II**

1) a)

b) $a = 0$; $b = 1$; $c = 1+i$; $d = i$; $e = \frac{1}{2}i$; $f = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $g = -\frac{1}{2} + i$.

c) D, F, B, D sont « quatre points » du plan tels que $D \neq F$ et $B \neq D$, alors — **Partie I** — il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.

2) a) Le rapport k de s est égal à

$$k = \frac{FD}{DB} = \frac{|d-f|}{|b-d|} = \left| \frac{d-f}{b-d} \right| = \dots = \left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$$

l'angle θ de s est égal à

$$\theta = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FD}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}) = \arg(d-f) - \arg(b-d)$$

$$\theta = \arg\left(\frac{d-f}{b-d}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

b) L'écriture complexe de s est de la forme

$$z' = \alpha z + \beta$$

avec $\alpha = ke^{i\theta} = \frac{1}{2}i$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

On détermine β en exprimant que $s(B) = D$:

$$i = \frac{1}{2}i \times 1 + \beta$$

D'où $\beta = \frac{1}{2}i$ et l'écriture complexe de s est

$$z' = \frac{1}{2}i(z+1)$$

c) L'affixe du centre Ω de s est la solution de l'équation :

$$z = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}i \iff \left(1 - \frac{1}{2}i\right)z = \frac{1}{2}i$$

$$\iff z = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

Finalement

$$\Omega\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)$$