

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. **Étude d'une fonction f .** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . La courbe \mathcal{C}_f est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

- a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- b. Calculer la dérivée f' de la fonction f .
- c. En déduire les variations de la fonction f .

2. **Étude d'une fonction g .** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a. Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$.

- b. Calculer la dérivée g' de la fonction g .
- c. Dresser le tableau de variation de la fonction g .

3. a. Démontrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

c. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe \mathcal{C}_g .

4. On désigne par \mathcal{A} l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

En exprimant l'aire \mathcal{A} comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire \mathcal{A} .

EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5i$ et $c = 4$ ainsi que les carrés $ABIJ$, $AKLC$ et $BCMN$, extérieurs au triangle ABC , de centres respectifs S , T et U .

La figure est donnée en **annexe 2**.

1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En déduire que le point J a pour affixe $-7 + 2i$.
On admettra que l'affixe du point K est $-2 - 6i$.
2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments $[BK]$ et $[JC]$ ont la même longueur. Calculer cette longueur.
3.
 - a. Calculer les affixes des points S et T .
 - b. Déterminer l'affixe du point U .
 - c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU .
4. Déterminer une mesure de l'angle (\vec{JC}, \vec{AU}) .
5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v = -0,752 + 0,864i$.
 - a. Établir que les points A , V et U sont alignés.
 - b. Que représente la droite (AU) pour l'angle \widehat{BVC} ?

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arêtes de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH) .

1. On se place dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$. Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

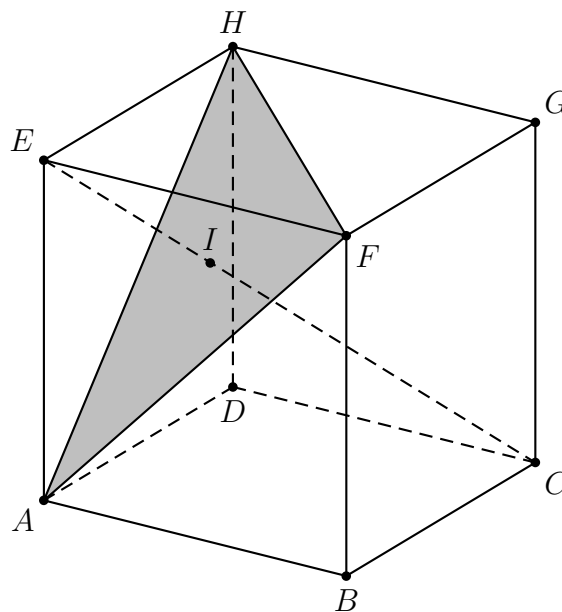
$$A(1; 0; 0) \quad B(1; 1; 0) \quad C(0; 1; 0) \quad D(0; 0; 0) \quad E(1; 0; 1) \quad F(1; 1; 1) \quad G(0; 1; 1) \quad H(0; 0; 1)$$

- a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC) .
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH) .
 - c. En déduire les coordonnées du point I , puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH) .
 - d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 - e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) . Que représente le point I pour le triangle AFH ?
2. Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Définitions :

- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre $EAFH$.



EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leq t) = p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Restitution organisée de connaissances.

Pré-requis :

- a. $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux événements tels que $p(B) \neq 0$);
- b. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ (où A est un événement);
- c. $p([a; b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leq b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s , on a :

$$p_{[t; +\infty[}([t; t + s]) = \frac{F(t + s) - F(t)}{1 - F(t)}$$

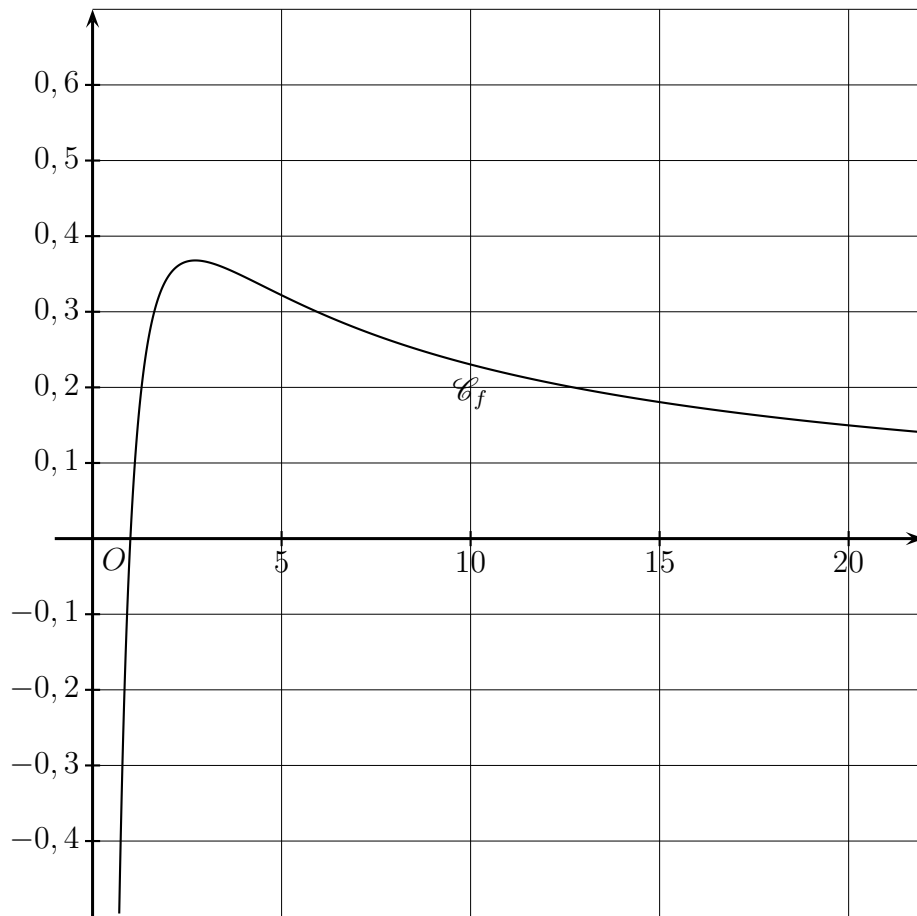
et que $p_{[t; +\infty[}([t; t + s])$ est indépendant du nombre réel t .

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.
3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante. Dans cette question, les probabilités seront arrondies à la sixième décimale.
 - a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.
 - b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

FEUILLES ANNEXES

Annexe 1, exercice 1



Annexe 2, exercice 2
Commun à tous les candidats

