❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques I-B

Durée 4 h

Le but de ce problème est l'étude de séries entières à termes positifs sur le bord de l'intervalle de convergence. Toutes les séries entières considérées ici s'annulent en 0 (et sont donc indicées par $\mathbb{N}^*$). Une série de terme général a_n sera notée $\sum a_n$ tandis que sa somme (lorsque la série converge) sera notée $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Le problème est constitué de 4 parties. La première partie est un exemple introductif illustrant les résultats généraux des parties suivantes ; elle est indépendante du reste du problème. Les parties II, III et IV ne sont pas indépendantes entre-elles et on pourra admettre un résultat non démontré d'une question précédente pour répondre à une autre question.

Partie I

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites de réels définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 \qquad v_n = \frac{1}{n} \qquad w_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$$

1) Montrer que les trois séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1.
   Etudier la convergence des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.
2) Déterminer la somme $f(x)$ (respectivement $g(x)$, $h(x)$) de la série $\sum u_n x^n$ (respectivement $\sum v_n x^n$, $\sum w_n x^n$).

Tournez la page S.V.P.

3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x)$.

Comparer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n}$.

Comparer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{v_n}$.

Partie II

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions

$$(H)\begin{cases} (H_1)\ a_n>0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^* \\ (H_2) \text{ la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1 \\ (H_3) \text{ la série } \sum a_n \text{ est divergente} \end{cases}$$

On désigne par f la somme de la série entière $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x\in]-1,1[$.

a) Soit $A>0$. Montrer qu'il existe $N_1\in\mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_1} a_n \geq 2A$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que $0\leq 1-x\leq\alpha$ entraîne $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n \geq A$.

c) En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$.

2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\lambda\in\mathbb{R}$.

a) On suppose $\lambda\neq 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$? Que peut-on dire de ce rayon de convergence lorsque $\lambda=0$?

b) Soit g la somme de la série entière, $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ pour $x\in]-1,1[$. On pose $\lambda_n=\dfrac{b_n}{a_n}$. Montrer que, pour tout $x\in]0,1[$, on a :

$$\frac{g(x)}{f(x)}-\lambda=\frac{1}{f(x)}\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n-\lambda)\,a_n x^n.$$

Montrer qu'il existe $M>0$ tel que $|\lambda_n-\lambda|\leq M$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $N_2\in\mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geq N_2$, $|\lambda_n-\lambda|\leq\varepsilon$.

En déduire que pour $x\in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=N_2+1}^{+\infty}|\lambda_n-\lambda|a_n x^n\leq\varepsilon f(x)$.

d) Montrer que, pour $x\in]0,1[$,

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-\lambda\right|\leq\varepsilon+\frac{M}{f(x)}\sum_{n=1}^{N_2}a_n x^n.$$

En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lambda$.

Partie III

On donne les résultats suivants qu'on ne demande pas de justifier : si $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\, d\theta$, alors $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on a $I_n \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

Soit l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x\cos^2\theta}}$.

1) Montrer que $F(x)$ est définie pour $x < 1$.
Que se passe-t-il pour $x = 1$?
Etudier sans calcul le sens de variations de F.
Montrer que F est continue sur $]-\infty, 1[$.

2) On définit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n \text{ pour } t \in]-1, 1[.$$

Expliciter α_0, α_1 et, pour $n \geq 2$, α_n.
Comparer α_n et I_n.

3) a) x étant fixé dans $]-1, 1[$, on pose, pour $N \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x\cos^2\theta}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos^{2n}\theta\, x^n + \rho_N(\theta).$$

Montrer que $\left|\rho_N(\theta)\right| \leq \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$.

b) En déduire que $F(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \alpha_n I_n x^n + R_N$

avec $|R_N| \leq \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$.

En déduire le développement en série entière de $F(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

4) En utilisant les résultats de la partie II, déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie IV

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions :

$$(H') \begin{cases} (H'_1)\ a_1 > 0 \text{ et } a_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ (H'_2)\ \text{la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1 \\ (H'_3)\ \text{la série } \sum a_n \text{ est divergente} \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions (H_1) et (H_3) de la partie II.
Montrer que le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est au plus égal à 1.

b) Soit $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$. En remarquant que $r^k \geq r^n$ pour $0 \leq k \leq n$, montrer que la suite $(A_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
En déduire que (A_n) vérifie toutes les conditions (H) de la partie II.

c) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x)\sum_{k=1}^{n} A_k x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1}.$$

En déduire une relation entre $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n$.

2) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Posons $C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{C_n}{A_n} = \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, la série $\sum C_n x^n$ est convergente.

b) En déduire que la série $\sum c_n x^n$ est convergente pour $x \in]-1, 1[$ et établir une relation entre $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n$.

c) Montrer alors que $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n}{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n} = \lambda$.

3) On définit les deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ c_n &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est de la forme } 2^k,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

a) Si $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, montrer que $A_n \sim \ln n$.

b) Montrer que si $C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$, $\qquad \frac{\ln n}{\ln 2} - 1 \leq C_n \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$.

c) Déduire de ce qui précède un équivalent quand x tend vers 1 de la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} x^{2^k}$.