❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-A

Durée 4 h

Les trois exercices sont indépendants. Ils seront rédigés sur des copies distinctes regroupées dans l'une d'entre elles formant chemise.
Toutes les réponses seront bien sûr justifiées.

Exercice n°1 :

Soit E l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les droites D et D' définies respectivement par les équations :

$$D \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z + a = 0 \end{cases} \qquad\qquad D' \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z - a = 0 \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif donné.
On définit la surface S comme l'ensemble des points de E équidistants de D et D'.
Pour $\theta \in [0, \pi]$, on désigne par C_θ la courbe intersection de S et du plan d'équation :

$$x \sin\theta - y \cos\theta = 0$$

1°) Déterminer une équation de la surface S. Préciser sa nature géométrique.

2°) Étudier l'intersection de S avec le plan d'équation $z = h$ où $h \in \mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

3°) a) Montrer que C_θ admet la représentation paramétrique :

$$x = t\cos\theta$$
$$y = t\sin\theta \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$
$$z = t^2 \frac{\sin\theta\cos\theta}{2a}$$

b) Discuter selon les valeurs de θ la nature de la courbe C_θ.
Représenter graphiquement ces diverses formes.

4°) Déterminer le trièdre de Frenet de C_θ au point O :
on choisira la courbure positive ou nulle et on discutera selon les valeurs de θ.

5°) a) Déterminer, lorsqu'il existe, le centre de courbure I_θ de C_θ au point O.
b) On désigne par $\zeta(\theta)$ la troisième coordonnée de I_θ.
Que peut-on dire de $\dfrac{1}{\zeta(\theta)} + \dfrac{1}{\zeta(\theta + \frac{\pi}{2})}$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$?

Exercice n°2 :

Soit α un réel.
On considère l'équation différentielle suivante pour $x \in \;]-1, 1[$:

$$(\mathrm{E}_\alpha) \quad (1 - x^2)\, y''(x) - \alpha\, x\, y'(x) + \alpha\, y(x) = 0$$

1°) On suppose que $\alpha = 2$.
Déterminer les séries entières solutions de l'équation différentielle (E_2).
Après avoir calculé leurs rayons de convergence, exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires.
A-t-on ainsi toutes les solutions de (E_2) ?

2°) On suppose que $\alpha = 3$.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, on pose :

$$\Phi(P) = (1 - X^2)\,P'' - 3\,X\,P'$$

a) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
c) Φ est-elle diagonalisable ? Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?
En déduire toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_3).

3°) Soit $\varphi :\;]-1, 1[\to J$ une fonction bijective de classe C^1.
On définit la fonction z par $y(x) = z(\varphi(x))$ pour tout x de $]-1, 1[$.
a) Calculer les dérivées y' et y'' à l'aide des dérivées de z et de φ.
b) Pour quelle(s) valeur(s) de α existe-t-il un changement de variables $t = \varphi(x)$ transformant l'équation (E_α) en une équation différentielle linéaire à coefficients constants ?
c) Résoudre dans ce(s) cas l'équation (E_α) : on pourra choisir φ de telle sorte que $\varphi'(0) = 1$.

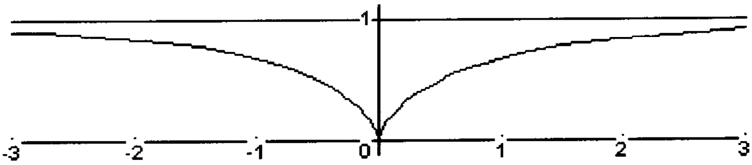
Exercice n°3 :

Soit E l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un réel. On considère la courbe paramétrée C_a donnée dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par :

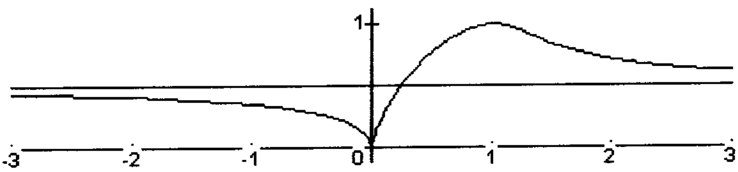
$$x(t) = \frac{1}{(t+a)(1+t^2)} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

1°) On suppose $a = 0$.
Pour information (car cela n'est pas utile pour la suite), le tracé de la courbe C_0 donné par une calculatrice graphique est :



Soit Δ_t la droite passant par le point M de la courbe C_0 correspondant au paramètre t et perpendiculaire à la droite (OM).
Déterminer l'enveloppe L de la famille de droites $(\Delta_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Caractériser la courbe L.

2°) On suppose maintenant que a vérifie : $0 < a < \sqrt{3}$.
a) Que peut-on dire de C_a et de C_{-a} ?
b) Étudier les branches infinies de C_a.
c) Quelle est la forme de la courbe au voisinage de l'origine O ?
d) Étudier les variations de x et de y, fonctions de t.
On ne tracera pas la courbe.
Voici, pour $a = 1$, son tracé donné par une calculatrice graphique :



3°) a) On considère trois points de E de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3).

Montrer qu'ils sont alignés si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est nul.

b) Soient t_1, t_2 et t_3 trois réels.

Montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) \\ y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est égal à :

$$\frac{(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)(a + t_1 + t_2 + t_3)}{(t_1 + a)(t_2 + a)(t_3 + a)(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)(1 + t_3^2)}.$$

Tournez la page S.V.P.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que trois points distincts M_1, M_2 et M_3 de C_a correspondant aux paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

4°) Soient A et A' les points de C_a correspondant aux paramètres $-\dfrac{a}{3}$ et $\dfrac{a}{3}$, dans cet ordre.

À tout point P de C_a différent de A, on associe le point Q différent de P, intersection de la droite (AP) et de C_a.

a) Montrer que Q existe pour tout point P différent de A'.

b) Soient P_1, P_2 et P_3 trois points distincts de C_a différents de A et de A'.
Montrer que si P_1, P_2 et P_3 sont alignés les points Q_1, Q_2 et Q_3 sont aussi alignés.