

✱ Banque filière PT ✱

## Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

---

Le problème porte sur l'étude de transformations géométriques de l'espace qui caractérisent en mécanique la déformation d'un matériau. Aucune connaissance de physique ou de mécanique n'est évidemment nécessaire à sa résolution.

Dans tout ce problème, l'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne canonique, sa base canonique  $B_c$  étant notée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et le repère cartésien associé est  $(O, B_c)$ . Une matrice  $(n,p)$  est une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Notations :

Le produit scalaire de deux éléments  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

La transposée d'une matrice  $A$  est notée  ${}^tA$ .

$I_3$  est la matrice identité  $(3,3)$ .

Les endomorphismes ou les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  seront notés en lettres minuscules et les matrices associées dans la base canonique seront notées de la même lettre majuscule.

Par exemple, si  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ ,  $F$  est la matrice de  $f$  dans la base  $B_c$ ; si  $\vec{u}$  est un élément de  $\mathbb{R}^3$ ,  $U$  est sa matrice dans la base canonique  $B_c$ .

En particulier  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Tournez la page S.V.P.**

## Première partie

Soit  $\alpha$  un réel non nul. On définit deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$   $f$  et  $g$  par leurs matrices

$$F = I_3 + 2\alpha E_1 {}^t E_2 \quad \text{et} \quad G = {}^t F.$$

1. Montrer que la droite vectorielle de base  $(\vec{e}_3)$  et le plan de base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sont stables par  $f$ .
2. Vérifier que les valeurs propres  $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  de  $g \circ f$  sont strictement positives et peuvent être numérotées de telle sorte que  $\mu_1 > \mu_2$  et  $\mu_1 \mu_2 = \mu_3$ .
3. Soient  $a$  et  $b$  deux réels ; on définit les vecteurs  $\vec{u}_1 = a\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  et  $\vec{u}_2 = b\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ .
  - (a) Donner les relations que doivent vérifier  $a$  et  $b$  pour que  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$  et  $f(\vec{u}_1) \cdot f(\vec{u}_2) = 0$ . En déduire le polynôme unitaire de degré 2 dont  $a$  et  $b$  sont les racines.
  - (b) On pose  $\vec{u}_3 = \vec{e}_3$ . Déterminer  $a$  et  $b$  de telle sorte que  $B = (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  et  $(f(\vec{u}_i))_{1 \leq i \leq 3}$  soient des bases orthogonales de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B$  étant de plus une base directe.
4. Vérifier que  $B$  est une base de vecteurs propres de  $g \circ f$  et préciser la valeur propre associée à chacun des vecteurs.
5. Soit  $r_\theta$  la rotation d'axe orienté par  $\vec{e}_3$  et d'angle de mesure  $\theta$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . Montrer qu'il existe une unique valeur de  $\theta$  tel que  $s = r_\theta^{-1} \circ f$  soit un endomorphisme symétrique de valeurs propres strictement positives et préciser cette valeur en fonction de  $\arctan(\alpha)$ .

## Deuxième partie

Dans cette partie, on pose  $\alpha = 1$ .

Soient  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de points définies par  $m_0, \vec{O}p_0 = f(\vec{O}m_0)$  et les relations de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, \vec{O}m_{n+1} = g(\vec{O}p_n)$  et  $\vec{O}p_{n+1} = f(\vec{O}m_{n+1})$ .

On pose enfin :

$$\vec{O}m_n = x_n \vec{e}_1 + y_n \vec{e}_2 + z_n \vec{e}_3$$

$$\vec{O}p_n = \tilde{x}_n \vec{e}_1 + \tilde{y}_n \vec{e}_2 + \tilde{z}_n \vec{e}_3$$

1.
  - (a) Etudier les suites  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\tilde{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - (b) Montrer que  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
2. On suppose que  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $m$ .
  - (a) Montrer que  $\vec{O}m$  est un vecteur invariant par  $g \circ f$ .
  - (b) En déduire une définition géométrique de  $m$ .

3. Soit  $Q$  la matrice de passage de  $B_c$  à  $B$  (base définie en première partie question 3b). On définit la matrice (3,1)  $M'_n$  par

$$M'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

- (a) Que représente  $M'_n$  ?
- (b) Sans écrire la matrice  $Q$ , donner la relation de récurrence liant  $M'_{n+1}$  et  $M'_n$ . Exprimer alors  $(x'_n, y'_n, z'_n)$  en fonction de  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  et  $n$ .
- (c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $M'_0$  pour que la suite  $(M'_n)_{n \in \mathbf{N}}$  soit convergente.
4. (a) Montrer que la suite  $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge si et seulement si  $m_0$  appartient à un plan  $(\Pi)$  dont on donnera une équation cartésienne dans le repère  $(O, B_c)$ .
- (b) On suppose que  $m_0$  appartient au plan  $(\Pi)$  sans appartenir à la droite passant par  $O$  de base  $(\vec{e}_3)$ . Montrer que les points  $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont alignés sur une droite  $(\Delta)$  et les points  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sur une droite  $(\Delta')$ .
- (c) Soit  $m_0$  un point du plan  $(\Pi)$  autre que  $O$  et vérifiant  $z_0 = 0$ . Donner une construction géométrique des points  $(m_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à partir de  $m_0$  et des droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . On tracera une figure pour expliciter cette construction.

### Troisième partie

On se propose de généraliser les résultats de la première partie au cas d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  de déterminant strictement positif.  $f$  étant de matrice  $F$  dans  $B_c$ , on définit  $g$  par sa matrice  ${}^tF$ .

1. Un endomorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{R}^3$  est dit défini positif si pour tout élément  $\vec{x}$  de  $\mathbb{R}^3$ , autre que  $\vec{0}$ ,  $\vec{x} \cdot \phi(\vec{x}) > 0$ .
- (a) Montrer que si un endomorphisme est défini positif ses valeurs propres réelles sont strictement positives.
- (b) Soit un endomorphisme  $\phi$  symétrique de valeurs propres strictement positives. Montrer que  $\phi$  est défini positif.
- (c) Montrer que  $g \circ f$  est symétrique et défini positif.
2. Soit  $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  une famille de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .
- (a) Montrer que si  $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  est une base orthogonale de vecteurs propres de  $g \circ f$ ,  $(f(\vec{u}_i))_{1 \leq i \leq 3}$  est aussi une base orthogonale.
- (b) Réciproquement, on suppose que  $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  et  $(f(\vec{u}_i))_{1 \leq i \leq 3}$  sont des bases orthogonales; en calculant  $\vec{u}_i \cdot g \circ f(\vec{u}_j)$  pour  $i \neq j$ , montrer que  $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  est une base de vecteurs propres de  $g \circ f$ .

3. Soit  $B = (\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  une base orthonormale de vecteurs propres de  $g \circ f$ ,  $\vec{u}_i$  étant associé à la valeur propre  $\mu_i$ .

(a) Montrer que

$${}^t F F = \sum_{i=1}^3 \mu_i U_i {}^t U_i$$

(b) On pose  $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$  et  $S = \sum_{i=1}^3 \lambda_i U_i {}^t U_i$ . Calculer  $S^2$ . Montrer que l'endomorphisme  $s$  de matrice  $S$  est un endomorphisme symétrique, défini positif.

4. (a) Soit  $R = FS^{-1}$ . Vérifier que  $R$  est une matrice orthogonale.

(b) En déduire que  $f$  s'écrit sous la forme  $r \circ s$  où  $r$  est une rotation et  $s$  un endomorphisme symétrique défini positif.

5. On définit des vecteurs  $\vec{u}'_i$  pour  $1 \leq i \leq 3$  par les relations  $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}'_i$ .

(a) Vérifier que  $B' = (\vec{u}'_i)_{1 \leq i \leq 3}$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Soit  $Q$  (respectivement  $Q'$ ) la matrice de passage de la base  $B_c$  à la base  $B$  (respectivement  $B'$ ). Exprimer  $R$  à l'aide de  $Q$  et  $Q'$ .

6. Montrer que l'image par  $f$  d'une sphère centrée en  $O$  et de rayon  $\rho$  est une quadrique dont on précisera la nature, une base orthonormale où cette quadrique admet une équation réduite (c'est à dire ses axes principaux) et cette équation réduite.