51PY4

✵ Banque filière PT ✵

Epreuve de Mathématiques I-B

Durée 4 h

Question préliminaire

Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée à coefficients réels soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Partie I : Algorithme de Babylone

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \, , \\ v_{n+1} = u_n + \ v_n \, . \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'unique matrice A telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation: $\rho_{n+1} = A\,\rho_n$.

2. Quelles sont les valeurs propres de A ?
La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

3. Montrer que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout entier n.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les deux inégalités:

$$\frac{u_n}{v_n} \geq 1, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right|.$$

5. La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle une limite ? Quelle est cette limite ?

6. Proposer une méthode d'approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près, puis à 10^{-4} près.

Partie II : Etude d'une réaction chimique

L'hydrogène et l'oxygène réagissent suivant la formule

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O.$$

En fait, cette réaction est le résultat de la combinaisons de plusieurs réactions faisant intervenir notamment les radicaux H^+, O^{2-} et OH^-. Pour simplifier l'étude, on suppose que seules les trois réactions suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned} O^{2-} + H_2 &\longrightarrow OH^- + H^+, \\ OH^- + H_2 &\longrightarrow H_2O + H^+, \\ H^+ + O_2 &\longrightarrow OH^- + O^{2-}. \end{aligned}$$

On suppose aussi que ces trois réactions sont simultanées et ont la même vitesse. On prend comme unité de temps la durée commune de ces trois réactions. On part à l'instant $n = 0$ d'un seul radical O^{2-}, d'aucun radical H^+, d'aucun radical OH^-, et d'un nombre illimité de molécules d'hydrogène (H_2) et d'oxygène (O_2).

A l'instant $n = 1$, il n'y a plus de radical O^{2-} et il a été produit un radical OH^- et un radical H^+. On note o_n, $(oh)_n$ et h_n le nombre de radicaux O^{2-}, OH^- et H^+ présents à l'instant n.

A l'instant $n+1$, on suppose que tous les radicaux qui étaient présents à l'instant n ont réagi selon les trois réactions écrites. Ainsi o_{n+1}, $(oh)_{n+1}$ et h_{n+1} désignent aussi le nombre de radicaux O^{2-}, OH^- et H^+ créés entre l'instant n et l'instant $n+1$.

On pose $\rho_n = \begin{pmatrix} o_n \\ (oh)_n \\ h_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer ρ_0, ρ_1 et ρ_2. Vérifier que ρ_3 est égal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer l'unique matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait: $\rho_{n+1} = A\,\rho_n$.

3. Montrer que o_n peut être écrit, pour tout $n \geq 0$, sous la forme:

$$o_n = \alpha\,(-1)^n + \beta\,\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma\,\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

   où α, β et γ sont des constantes réelles.

4. Montrer que γ n'est pas nulle. Quel est son signe ?

5. La suite $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Si oui, préciser laquelle.

Partie III : Diffusion d'un gaz

Dans toute cette partie, nous considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

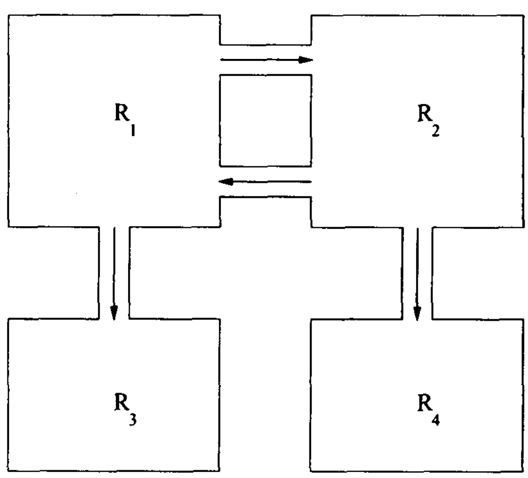
1. Nous dirons qu'une suite de matrices $(B_n = (b_{ij}(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels converge vers une matrice $B = (b_{ij})$ si, pour tous i et j fixés, chaque suite réelle $(b_{ij}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b_{ij} quand n tend vers $+\infty$.
   Soit P une matrice. Montrer que si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers B, alors $(PB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers PB et $(B_nP)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers BP.

2. On note $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \frac{1}{6}I$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n$ égale 0.

3. Sans calculer $(I-Q)^{-1}$, montrer que $I-Q$ est inversible puis démontrer la relation suivante:
$$\lim_{n\to\infty}(I + Q + Q^2 + \cdots + Q^n) = (I-Q)^{-1}.$$

4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

5. Le schéma ci-dessous représente quatre réservoirs R_1, R_2, R_3 et R_4 contenant un même gaz.



   Les "tuyaux" reliant les différents réservoirs schématisent en fait des membranes semi-perméables qui ne laissent passer le gaz que dans le sens indiqué par la flèche.

   Après une heure de fonctionnement, on constate que la moitié du gaz initialement contenu dans R_1 est passé de R_1 à R_2 et qu'un sixième du gaz initialement contenu dans R_1 s'est écoulé dans R_3. De même, la moitié du gaz initialement contenu dans R_2 est passé dans R_1 et un sixième du gaz initialement contenu dans R_2 s'est écoulé dans R_4.

   On introduit à l'instant $t = 0$ un litre de gaz dans le réservoir R_1 et on laisse le système évoluer librement pendant un temps infini. La répartition du gaz dans les réservoirs a-t-elle une limite ? Quelle est cette limite ?

Partie IV : Un cas plus général

Dans cette partie, on fixe une base de $\mathbb{R}^d$, $d > 1$. On convient de noter de la même façon un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et la matrice colonne à d lignes associée à ce vecteur. Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ la matrice transposée. On désigne par A une matrice carrée d'ordre d à coefficients réels.

1. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors λ est aussi valeur propre de ${}^tA$.

2. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et soit y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre μ. Montrer, pour λ et μ distincts, la relation ${}^ty\,x = 0$. Indication: on pourra calculer de deux façons différentes la quantité ${}^ty\,A\,x$.

3. On suppose désormais que A possède d valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ et vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$.
   On note x_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i et y_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à cette même valeur propre.

   (a) Montrer que $(x, y) \longmapsto {}^ty\,x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

   (b) Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.

   (c) En déduire que l'on peut choisir la famille $(y_1, \dots, y_d)$ de sorte que ${}^ty_i\,x_i = 1$ pour tout i, $1 \leq i \leq d$.
   Dans toute la suite, on supposera que ce choix a été fait.

4. Pour tout i, $1 \leq i \leq d$, on définit la matrice carrée A_i d'ordre d par $A_i = x_i\,{}^ty_i$. Montrer que, pour $i \neq j$, la matrice $A_i\,A_j$ est la matrice nulle et que pour tout i, $1 \leq i \leq d$, on a la relation $A_i^2 = A_i$.

5. On note I la matrice identité d'ordre d. Montrer les deux relations: $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} A_i = I$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \lambda_i A_i = A$.
   Indication: on rappelle que $(x_1, \dots, x_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.

6. Calculer A^n en fonction des A_i.

7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n$.

8. Dans quels cas la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Calculer alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$.

9. Retrouver, à l'aide de ces résultats, certains des résultats des parties I et II.

Partie V : Etude d'une population

Une certaine espèce d'insectes se comporte de la manière suivante :
- la moitié des insectes meurent dans leur première année,
- chaque survivant à cette première année donne naissance à un descendant au cours de sa seconde année,
- un quart de ces survivants atteignent la troisième année,
- chaque insecte ayant atteint la troisième année donne naissance à un descendant au cours de cette troisième année,
- aucun insecte ne vit plus de trois ans.

On part d'une population comportant 1000 insectes de première année, 1000 de seconde année et 1000 de troisième année. On note a_n, b_n, c_n le nombre d'insectes respectivement de première, de seconde et de troisième année après n années. Pouvez-vous étudier, à l'aide des résultats de la partie IV, l'effectif de la population quand n tend vers l'infini ?