❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques I-B

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

On désigne par r un entier naturel supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{N}_r$ l'ensemble des entiers naturels $\{1, 2, \cdots, r\}$.
On désigne par $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à coefficients réels.
On note I_r la matrice unité d'ordre r.
Une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est dite à diagonale strictement dominante si, et seulement si

$$\forall i \in \mathbb{N}_r \quad |m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|.$$

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_r^2 \qquad a_{ij} \in [0, 1]$;

(ii) $\forall i \in \mathbb{N}_r \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_{ij} = 1.$

Elle est dite stochastique stricte si, de plus, ses coefficients sont tous non nuls.

On note S_r l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $S_r^\star$ l'ensemble des matrices stochastiques strictes.
Soit $A = (a_{ij})$ un élément de S_r, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad A^{n+1} = A^n \times A \quad \text{et} \quad A^n = (a_{ij}^{(n)}).$$

On a donc $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$.
Si pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_r^2$, la suite de terme général $a_{ij}^{(n)}$ a une limite finie quand n tend vers l'infini, on dira que la suite de terme général A^n a une limite finie quand n tend vers l'infini.
On notera :

$$\lim_{n \to +\infty} A^n = A^\infty = (a_{ij}^\infty).$$

PARTIE A

1. Montrer que le produit de deux éléments de S_2 est élément de S_2.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que:

   $$A^2 = aA + bI_2.$$

   (b) En déduire qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que l'on ait:

   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad A^n = a_n A + b_n I_2.$$

   (c) Montrer que l'on a, pour tout entier strictement positif n:

   $$a_{n+1} = -\frac{1}{6} a_n + 1 \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = -\frac{1}{6} b_n + \frac{1}{6}.$$

   (d) Déterminer le réel l tel que la suite de terme général $a_n - l$ soit géométrique; en déduire l'expression de a_n en fonction de n. Exprimer de même b_n en fonction de n.

   (e) Déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

   (f) Montrer que A^n admet une limite que l'on déterminera quand n tend vers l'infini et que A^∞ est un élément de S_2.

3. On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice B. On les notera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   (b) En déduire que la matrice B est semblable à une matrice diagonale D.

   (c) En déduire l'expression de la matrice B^n en fonction de n.

   (d) Montrer que B^n admet une limite que l'on déterminera quand n tend vers l'infini et que B^∞ est un élément de S_3.

4. On pose $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres de C.

   (b) Calculer J^n pour pour tout entier $n \geq 2$.

(c) Exprimer C comme combinaison linéaire de I_3 et J.
En déduire l'expression de C^n en fonction de n.

(d) Montrer que C^n admet une limite que l'on déterminera quand n tend vers l'infini et que C^∞ est élément de S_3.

PARTIE B

1. Montrer que S_r et $S_r^\star$ sont stables par produit.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in S_r$ et n un entier strictement positif.
   (a) Vérifier que A^n est une matrice stochastique.
   (b) Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique de la matrice A, que 1 est une valeur propre cette matrice.
   (c) On suppose que A^∞ existe. Montrer que A^∞ est une matrice stochastique et que l'on a : $A^\infty A = AA^\infty = A^\infty$.
3. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante.

   On considère $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne tel que $MX = 0$.

   On suppose que X est non nul ; en notant i_0 un indice défini par la relation $|x_{i_0}| = \max\limits_{1 \leq i \leq r} |x_i|$, montrer que l'on aboutit à une contradiction. En déduire que M est inversible.

   Ce résultat pourra être admis et utilisé par la suite.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in S_r^\star$.
   (a) On pose $B = A - I_r$. On supprime la dernière ligne et la dernière colonne de B, la matrice carrée d'ordre $r-1$ ainsi obtenue est notée C.
   Vérifier que C est une matrice à diagonale strictement dominante.
   (b) En déduire que l'espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
   (c) Montrer que les valeurs propres de A sont, soit égales à 1, soit de module strictement inférieur à 1.
5. Soit $A = (a_{ij}) \in S_r$. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à 1. En déduire que $|\det A| \leq 1$.
6. Montrer par récurrence que, pour toute matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, telle que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad m_{ij} \in]0,1[\qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N}_r \quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \leq 1 \;,$$

   on a $|\det M| < 1$. En déduire que la valeur absolue du déterminant d'une matrice stochastique stricte est strictement inférieure à 1.

7. Soit $A = (a_{ij}) \in S_r^\star$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_r$ et tout entier strictement positif n, on pose :

$$\alpha_j^{(n)} = \min_{i \in \mathbb{N}_r} a_{ij}^{(n)} \quad ; \quad \beta_j^{(n)} = \max_{i \in \mathbb{N}_r} a_{ij}^{(n)} \quad ; \quad \gamma_j^{(n)} = \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}.$$

   (a) Justifier l'existence d'un réel $\epsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad a_{ij} \geq \epsilon$.

   (b) Exprimer $a_{ij}^{(n+1)}$ en fonction de $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ et des coefficients de A^n.

   (c) Montrer que pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}_r^2$ et tout entier strictement positif n, on a :

$$a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \epsilon \gamma_j^{(n)} \qquad \text{et} \qquad \beta_j^{(n)} - a_{ij}^{(n+1)} \geq \epsilon \gamma_j^{(n)}.$$

   (d) En déduire que, pour tout entier $j \in \mathbb{N}_r$ et tout entier strictement positif n, on a :

$$\alpha_j^{(n)} \leq \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} \qquad \text{et} \qquad \gamma_j^{(n+1)} \leq \gamma_j^{(n)}(1 - 2\epsilon).$$

   (e) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}_r$, la suite de terme général $\gamma_j^{(n)}$ converge quand n tend vers l'infini et préciser sa limite.

   (f) En déduire que A^n a une limite quand n tend vers l'infini.

   (g) Comparer les lignes de A^∞.

8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

   Déterminer les valeurs propres de A et vérifier qu'elles satisfont aux résultats trouvés précédemment.
   Montrer que A^n admet une limite et déterminer A^∞.