

* Banque filière PT *

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

L'objet de ce problème est de déterminer la forme générale sur $]0, +\infty[$ des solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \lambda^2) y = 0 \quad (\mathcal{E})$$

où λ est un réel positif non entier.

I. Etude de la fonction Bêta

u et v étant des réels strictement positifs, on pose :

$$B(u, v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt .$$

1. Pour tout entier $n > 1$, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n] ,$$

$$f_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [0, n] ,$$

On désigne par f la fonction définie par : $f(x) = e^{-x}$.

a. Pour tout réel x strictement positif, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

b. n étant un entier strictement supérieur à 1, on introduit la fonction définie par :

$$\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) \text{ si } x \in [0, n] , \quad \varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [0, n] .$$

Etudier les variations de φ_n (Pour déterminer le signe de φ_n , on pourra étudier la fonction ψ_n ,

définie sur $[0, n[$ par : $\psi_n(x) = (n-1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$).

c. Montrer qu'il existe un unique réel α_n dans $]1, n[$ tel que φ_n soit maximale en α_n .

d. Montrer que $\varphi_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n} e^{-\alpha_n}$.

e. Montrer que : $0 \leq \varphi_n(\alpha_n) \leq \frac{1}{ne}$ (on pourra par exemple étudier la fonction $x \mapsto xe^{-x}$).

f. Tracer le graphe de φ_n sur $[0, n]$.

2. a. Montrer que l'on peut écrire : $B(u, v) = \int_0^1 (1-t)^{v-1} t^{u-1} dt$.

b. Montrer que : $B(u, v) = B(v, u)$.

c. Démontrer l'égalité suivante : $B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v)$.

3. Pour tout entier n strictement supérieur à 1, et tout réel $x > 0$, on pose : $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

a. Par un changement de variable judicieux, montrer que : $I_n(x) = n^x B(n+1, x)$.

b. En déduire la valeur de $I_n(x)$.

II. Etude de la fonction Gamma

Soit Γ la fonction définie par : $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ pour $x > 0$.

1. Vérifier la convergence de l'intégrale définissant Γ .

2. Pour tout entier $n > 1$, on considère la fonction Γ_n définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{x-1} dt$.

a. Les fonctions Γ_n sont-elles continues ?

b. Pour tout réel x strictement positif, montrer que $\Gamma_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Que vaut $\Gamma(1)$?

d. Calculer, pour tout entier strictement positif n , la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Pour tout réel $x > 1$, déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x-1)$.

Montrer que cette formule permet alors de prolonger Γ à $] -1, 0 [$.

En déduire que l'on peut prolonger Γ à $] -\infty, 0 [\setminus \mathbb{Z}^-$.

4. Soit x un réel strictement positif.

a. Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\int_A^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \varepsilon$$

b. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$:

$$\left| \int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^A t^{x-1} f_n(t) dt \right| \leq \varphi_n(\alpha_n) \int_0^A t^{x-1} dt$$

c. En déduire l'existence d'un entier n_1 tel que, pour $n \geq n_1$:

$$\left| \int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^A t^{x-1} f_n(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

d. Quelle est la limite de $I_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

e. En déduire : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \frac{n!}{(x+n)(x+n-1) \dots x}$.

III. Equation de Bessel

On utilisera, dans cette partie, le prolongement de la fonction Γ à $] -\infty, 0[\setminus \mathbb{Z}^-$ introduit dans la partie II.

1. a. λ étant le réel positif non entier intervenant dans (\mathcal{E}) , soit $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$, dépendant du réel λ .
Pour x dans $]0, R[$, on pose : $y(x) = x^\lambda a(x)$.

On suppose que la fonction y est solution de (\mathcal{E}) sur $]0, R[$, et n'est pas identiquement nulle. Montrer que, pour $n \geq 2$:

$$a_n(\lambda) = \frac{-a_{n-2}(\lambda)}{n^2 + 2n\lambda}$$

b. Donner la valeur du coefficient $a_1(\lambda)$.

c. Quelles valeurs peut prendre $a_0(\lambda)$? Que peut-on déduire des valeurs de $a_0(\lambda)$ et $a_1(\lambda)$ pour la somme de la série $\left(\sum a_n(\lambda) x^n \right)$?

d. Montrer que R est infini, et que la fonction y est solution de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

e. On suppose, dans ce qui suit, que : $a_0(\lambda) = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$.

Montrer que, pour tout entier p : $a_{2p}(\lambda) = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda} p! \Gamma(\lambda+p+1)}$.

f. On pose, pour tout réel strictement positif x : $J_\lambda(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^n$.

Montrer que $J_{-\lambda}$ est aussi solution de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

g. Montrer que :

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(\lambda+n+1)}.$$

h. On suppose que $(J_{-\lambda}, J_{\lambda})$ est une base de l'espace des solutions de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

Donner la forme générale des solutions de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$.

2. Soit y une solution non identiquement nulle de l'équation de Bessel (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$, pour une valeur de λ fixée. On considère la fonction u définie pour tout réel strictement positif x par :

$$u(x) = x^{1/2} y(x).$$

a. Déterminer un nombre σ tel que, pour $x > 0$:

$$u''(x) + \left(1 + \frac{\sigma}{x^2}\right) u(x) = 0$$

b. On suppose que $\lambda = 1/2$. Déterminer y et tracer son graphe.

L'équation de Bessel régit en particulier les vibrations des membranes circulaires, comme celles d'instruments musicaux tels que le tambour, ou la grosse caisse.