

PARTIE A : Principe du moteur asynchrone1. Stator de la machine asynchrone : production d'un champ tournant

$$\begin{aligned}
 \underline{1.1)} \quad \vec{B}_x &= (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3) \cdot \vec{e}_x \\
 &= K \left(i_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_x + i_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_x + i_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_x \right) \\
 &= K \left(i_1 \cos 0 + i_2 \cos \frac{2\pi}{3} + i_3 \cos \frac{4\pi}{3} \right) \\
 &= K \left(i_1 - \frac{i_2}{2} - \frac{i_3}{2} \right) \\
 &= K I_n \left[\cos(\omega_s t) - \frac{1}{2} \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos \omega_s t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega_s t$$

$$\text{et } \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos \omega_s t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega_s t$$

$$\Rightarrow \vec{B}_x = K I_n \cos(\omega_s t) \left[1 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_x = \frac{3}{2} K I_n \cos \omega_s t}$$

$$\text{De même, } \vec{B}_y = (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3) \cdot \vec{e}_y$$

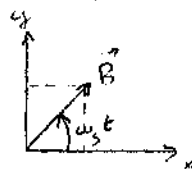
$$\begin{aligned}
 B_y &= K \left(i_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_y + i_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_y + i_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_y \right) \\
 &= K \left(0 + i_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + i_3 \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 &= K \left(i_2 \cos \frac{\pi}{6} + i_3 \cos \frac{5\pi}{6} \right) \\
 &= K \frac{\sqrt{3}}{2} (i_2 - i_3) = K I_n \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\
 &= K I_n \frac{\sqrt{3}}{2} \left[2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega_s t \right]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = \frac{3}{2} K I_n \sin \omega_s t}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} K I_n \sqrt{\cos^2 \omega_s t + \sin^2 \omega_s t}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{3}{2} K I_n}$$

1-2)



$$B_x = B \cos \omega_s t$$

$$B_y = B \sin \omega_s t$$

\Rightarrow l'angle entre \vec{B} et \vec{e}_x vaut $(\omega_s t)$

\Rightarrow l'angle varie linéairement avec le temps

\Rightarrow on a un champ tournant à la vitesse angulaire ω_s

$$1 \text{ tour} \Leftrightarrow 2\pi \text{ radian}$$

$$1 \text{ tour} \cdot \text{s}^{-1} \Leftrightarrow 2\pi \text{ radian} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$n_s \text{ tour} \cdot \text{s}^{-1} \Leftrightarrow \omega_s \text{ radian} \cdot \text{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad n_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = f_s$$

$$\Rightarrow n_s = 50 \text{ tours} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow n_s = 60 \times 50 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1} \quad (60 \text{ s} = 1 \text{ min})$$

$$\Rightarrow \boxed{n_s = 3000 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}}$$

2. Entraînement du rotor de la machine asynchrone

$$\underline{2.1)} \quad \phi_{\text{type}} = \iint_{\text{type}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot \vec{S} \text{ car } \vec{B} \text{ uniforme}$$

$$\Rightarrow \phi = N \phi_1 = N \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$\vec{B} = B \left(\cos \omega_s t \vec{e}_x + \sin \omega_s t \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{S} = S \left(\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y \right)$$

$$\Rightarrow \phi = NBS \left(\cos \omega_s t \cos \omega t + \sin \omega_s t \sin \omega t \right)$$

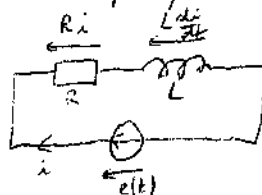
$$\Rightarrow \boxed{\phi = NBS \cos\left((\omega_s - \omega)t\right)}$$

$$\underline{2.2)} \quad \phi = \phi_n \cos \omega_n t$$

$$\text{loi de Faraday: } e = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = + \phi_n \omega_n \sin \omega_n t}$$

2-3) a) schéma électrique équivalent :



$$\Rightarrow R i + L \frac{di}{dt} = e \quad (\text{loi des mailles})$$

$$\Rightarrow \boxed{i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = \frac{\phi_n \omega_n}{R} \sin \omega_n t}$$

2.3) b) La solution de cette équation différentielle est la somme de 2 termes :

* solution générale : régime transitoire (qui ne nous intéresse pas ici)

* solution particulière : régime permanent sinusoïdal

on cherche $i(t)$ de la forme $i(t) = I_n \sin(\omega_n t - \psi)$

on injecte dans l'équation différentielle :

$$I_n \sin(\omega_n t - \psi) + \frac{L}{R} I_n \omega_n \cos(\omega_n t - \psi) = \frac{\phi_n \omega_n}{R} \sin \omega_n t$$

$$I_n \cos(\omega_n t - \psi - \frac{\pi}{2}) + \frac{L}{R} I_n \omega_n \cos(\omega_n t - \psi) = \frac{\phi_n \omega_n}{R} \cos(\omega_n t - \frac{\pi}{2})$$

on passe en notation complexe :

$$I_n e^{j\omega_n t - j\psi} (-j) + \frac{L}{R} I_n \omega_n e^{j\omega_n t - j\psi} = \frac{\phi_n \omega_n}{R} e^{j\omega_n t} (-j)$$

$$I_n e^{-j\psi} (1 + \frac{L}{R} \omega_n j) = \frac{\phi_n \omega_n}{R}$$

$$\Rightarrow I_n e^{-j\psi} = \frac{\phi_n \omega_n}{R + jL\omega_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n = \frac{\phi_n \omega_n}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2}}}$$

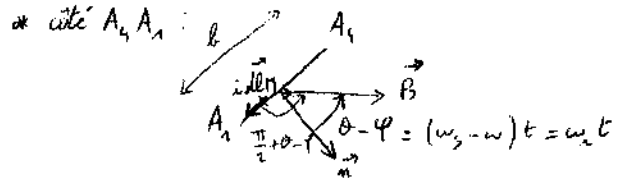
$$-\psi = \arg\left(\frac{\phi_n \omega_n}{R + jL\omega_n}\right) \Rightarrow \boxed{\psi = \arctan \frac{L\omega_n}{R}}$$

3. - Couple électromagnétique

3.1) * on sait que dans un champ magnétique uniforme :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = N i \vec{S} \wedge \vec{B} \quad (\text{formule})$$

* ici, la question est "établir" l'expression de $\Gamma(t)$
 → on va le retourner



$$d\vec{F}_2 = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i dl B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega_n t\right) \vec{u}_y = i B dl \cos \omega_n t \vec{u}_y$$

$$\vec{\Gamma} = \int_{A_3}^{A_4} \vec{O} \wedge d\vec{F}_2 \quad \text{avec } \vec{O} = \frac{L}{2} \vec{u}_y = L \cos \theta \vec{u}_y + L \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = i B \cos \omega_n t \left[-\cos \theta \int_0^{\frac{L}{2}} dl dl \vec{u}_z - \sin \theta \int_0^{\frac{L}{2}} dl dl \vec{u}_y \right]$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{0}$$

* côté $A_1 A_2$: idem : $\vec{\Gamma} = \vec{0}$

* côté $A_3 A_4$:

$$d\vec{F}_1 = i dl \vec{u}_y \wedge \vec{B}$$

$$\vec{O} \wedge = \frac{L}{2} \sin \theta \vec{u}_z + \frac{L}{2} \cos \theta \vec{u}_y + L \vec{u}_z$$

$$d\vec{\Gamma} = \vec{O} \wedge d\vec{F}_1 = \vec{O} \wedge (i dl \vec{u}_y \wedge \vec{B})$$

$$= i dl \vec{u}_y (\vec{B} \cdot \vec{O}) - \vec{B} (\vec{O} \cdot i dl \vec{u}_y)$$

$$= i dl \vec{u}_y B \frac{L}{2} (\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) - \vec{B} i dl$$

$$\text{car } \vec{B} = B (\cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u}_y)$$

$$d\vec{\Gamma} = \frac{i B \sin(\theta - \theta)}{2} dl \vec{u}_y - \vec{B} i dl$$

$$\vec{\Gamma} = \int_{A_3}^{A_4} d\vec{\Gamma} = \frac{i B \sin(\theta - \theta)}{2} a \vec{u}_y - \vec{0} \quad \text{car } \int_0^{\frac{L}{2}} dl dl = 0$$

$$\text{car } a \cdot b = S$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = \frac{N i S B \sin((\omega_3 - \omega)t)}{2} \vec{u}_y$$

N spires

$$\vec{\Gamma} = \frac{N i S B \sin \omega_n t}{2} \vec{u}_y$$

* côté $A_1 A_2$: idem : $\vec{\Gamma} = \frac{N i S B \sin \omega_n t}{2} \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma} = N i S B \sin \omega_n t \vec{u}_y}$$

* Plus rapidement, en utilisant le cosinus (\vec{B} uniforme)

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = N \times i \vec{S} \wedge \vec{B} = N i S \vec{u}_n \wedge \vec{B}$$

$$= N i S B \sin(\theta - \theta) \vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = N i S B \sin \omega_n t \vec{u}_y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(t) = N i S B \sin \omega_n t}$$

3.2) $i = I_n \sin(\omega_n t - \psi)$

$\Rightarrow \Gamma = NSBI_n \sin(\omega_n t) \sin(\omega_n t - \psi)$

or $\sin(\omega_n t - \psi) = \sin \omega_n t \cos \psi - \sin \psi \cos \omega_n t$

$\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle \sin x \cos x \rangle = \langle \frac{1}{2} \sin 2x \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \Gamma \rangle = NSBI_n \frac{1}{2} \cos \psi$

or $I_n e^{-j\psi} = \frac{\phi_n \omega_n}{R + jL\omega_n} \Rightarrow R + jL\omega_n = \frac{\phi_n \omega_n}{I_n} e^{j\psi}$

$\Rightarrow \cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2}}$

$\Rightarrow \langle \Gamma \rangle = NSBI_n \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2}}$
 $= \frac{\phi_n I_n}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2}}$

$\Gamma_{em} = \frac{\phi_n}{2} \frac{\phi_n \omega_n}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2}}$

$\Gamma_{em} = \frac{\phi_n^2}{2L} \frac{RL\omega_n}{R^2 + (L\omega_n)^2}$

3.3) * moteur à l'arrêt $\Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow \boxed{g = 1}$

* $\omega = \omega_s \Rightarrow \boxed{g = 0}$

3.4) $\Gamma_{em} = \Gamma_0 \frac{RL(\omega_s - \omega)}{R^2 + L^2(\omega_s - \omega)^2} = \Gamma_0 \frac{RLg\omega_s}{R^2 + L^2g^2\omega_s^2}$

$\Gamma_{em} = \Gamma_0 R \frac{(L\omega_s)g}{R^2 + (L\omega_s)^2 g^2}$

3.5) au démarrage : $g = 1 \Rightarrow \Gamma_d = \Gamma_0 R \frac{L\omega_s}{R^2 + (L\omega_s)^2}$

3.6) $f(x) = \frac{x}{R^2 + x^2}$ max pour $\frac{df}{dx} = 0$

$\frac{df}{dx} = \frac{R^2 + x^2 - x \cdot 2x}{(R^2 + x^2)^2} \Rightarrow R^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = R$
 ($x > 0$)

$\Rightarrow \Gamma_{em}$ est max pour $L\omega_s g = R$

$\Rightarrow \boxed{g_{max} = \frac{R}{L\omega_s}}$

$\Gamma_{max} = \Gamma_0 R \frac{R}{R^2 + R^2} = \frac{\Gamma_0}{2}$

$\Gamma_{max} = \frac{\Gamma_0}{2}$

3.7) a) $\Gamma_d = 9,9 \text{ N.m}$
 $g_{max} = 0,1$
 $\Gamma_{max} = 50 \text{ N.m}$

b) $g = g_{max} = 0,1 = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s}$

$\omega_s - \omega = 0,1\omega_s \Rightarrow \omega = 0,9\omega_s$

$\Rightarrow f = 0,9 f_s \Rightarrow n = 0,9 n_s = 2700 \text{ tours/min}$

c) $I_{R_{eff}} = \frac{I_n}{\sqrt{2}} = \frac{\phi_n \omega_n}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2}} = \frac{\phi_n g \omega_s}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + L^2 g^2 \omega_s^2}}$

or $g = g_{max} = \frac{R}{L\omega_s} \Rightarrow I_{R_{eff}} = \frac{\phi_n R}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + R^2}}$

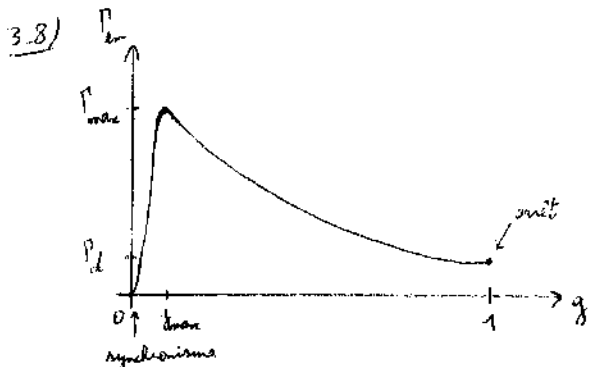
$I_{R_{eff}} = \frac{\phi_n}{2L}$

or $L\omega_s = 40 \Omega$ et $\omega_s = 2\pi f_s$ avec $f_s = 50 \text{ Hz}$
 $\Rightarrow L = 0,13 \text{ H}$

et $\Gamma_0 = \frac{\phi_n^2}{2L} \Rightarrow \phi_n = \sqrt{2L\Gamma_0}$

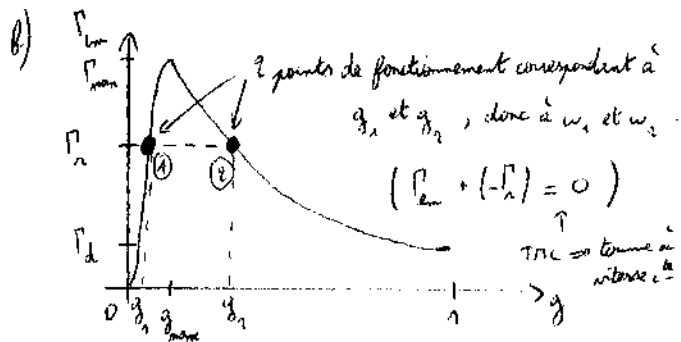
$\Rightarrow I_{R_{eff}} = \frac{\sqrt{2L\Gamma_0}}{2L} = \sqrt{\frac{\Gamma_0}{2L}}$

$I_{R_{eff}} = \sqrt{\frac{\Gamma_0}{2L}} = 20 \text{ A}$



3.3/a) si $\Gamma_n > \Gamma_d$, le moteur ne démarre pas (le couple

Γ_d n'est pas suffisant).



c) * point de fonctionnement ①:

si $\omega \downarrow$, $g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \nearrow$

$\Rightarrow \Gamma_{em} > \Gamma_n$

$\Rightarrow \omega \nearrow \Rightarrow$ point de fonctionnement stable

* point de fonctionnement ②:

si $\omega \nearrow$, $g \searrow$

$\Rightarrow \Gamma_{em} < \Gamma_n \Rightarrow \omega \searrow$

\Rightarrow point de fonctionnement instable

d) $R = 8 \Omega \Rightarrow \Gamma_d = 19 \text{ N.m}$

4. Puissance et rendement

4.1) $P_{méca} = \Gamma_{em} \omega = \Gamma_0 R \frac{L \omega_s g}{R^2 + L^2 \omega_s^2 g^2} \omega$

$$P_{méca} = \frac{\Gamma_0 R L \omega_s \omega}{R^2 + L^2 \omega_s^2 g^2}$$

$P_S = R \left(\frac{I_n}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{R \phi_n^2 \omega_s^2}{2 (R^2 + L^2 \omega_s^2)} \Rightarrow P_S = \frac{R \Gamma_0^2 L \omega_s^2}{R^2 + L^2 \omega_s^2}$

4.2) $P_{em} = P_{méca} + P_S$

$g = \frac{P_{méca}}{P_{em}} = \frac{P_{méca}}{P_{méca} + P_S} = \frac{1}{1 + \frac{P_S}{P_{méca}}}$

$$g = \frac{1}{1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_n \omega}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_n}{\omega}}$$

$$g = \frac{1}{1 + \frac{\omega_s - \omega}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega_s}$$

$$g = \frac{\omega}{\omega_s}$$

4.3) $g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \Rightarrow \omega_s - \omega = g \omega_s$

$\Rightarrow \omega = \omega_s (1 - g)$

$\Rightarrow g = 1 - g = 0,35$

PARTIE B: Sonde à effet Hall

1- Etude de l'effet Hall

1.1) $\vec{J} = \rho \vec{v} = nq \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{J}}{nq}$

1.2) Les porteurs de charges subissent une force d'origine magnétique: $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ qui dévie leur trajectoire ($\vec{F} \propto \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \propto -\vec{u}_z$). Les porteurs de charge ont donc tendance à s'accumuler sur un des côtés de la plaque, créant une accumulation de charges de ce côté, et une accumulation de charges opposées de l'autre côté.

\Rightarrow apparition d'un champ électrique \vec{E}_H .

régime permanent $\Rightarrow \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mg} = \vec{0}$

$\Rightarrow q \vec{E}_H + q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{J}{nq} B \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$

$\Rightarrow \vec{E}_H = \frac{JB}{nq} \vec{u}_y$ $E_{Hx} = 0$ ($\vec{E}_H \perp \vec{u}_x$)
 $E_{Hy} = \frac{JB}{nq}$
 $E_{Hz} = 0$

1.3) $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow dV_H = -\vec{E}_H \cdot d\vec{l} = -E_H dy$

$V_H = V(A_1) - V(A_2) = \int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} -E_H dy = \int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} E_H dy = E_H L$

$V_H = \frac{JBL}{nq}$ or $I = J(L)$

$\Rightarrow V_H = \frac{IB}{nqr} = \frac{C_H}{r} IB$ avec $C_H = \frac{1}{nq}$

1.4) Si on connaît le signe de I et de B, le signe de V_H nous renseigne sur le signe de C_H , et donc de q, ce qui permet de connaître le signe des porteurs de charges

1.5) a) conducteur métallique: $C_H = -3 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$
 semi-conducteur: $C_H = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$

$V_H \propto C_H \Rightarrow$ utiliser le semi-conducteur pour avoir $|V_H|$ max.

1.5) b) Bien le semi-conducteur:

$h = 1 \text{ mm} \Rightarrow V_H = 0,03 \text{ V}$

$h = 0,1 \text{ mm} \Rightarrow V_H = 0,3 \text{ V}$

Il est préférable d'utiliser l'épaisseur $h = 0,1 \text{ mm}$ car V_H est plus grand.

1.6) $\vec{J} = \gamma \vec{E}'$

avec $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_H$

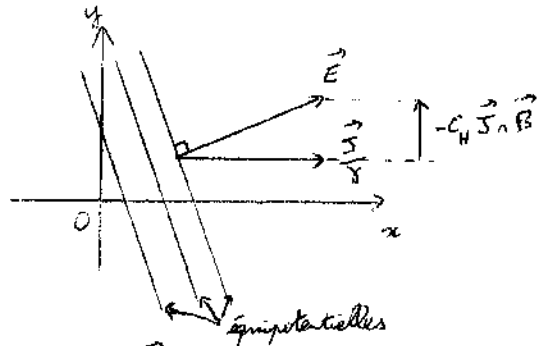
$\Rightarrow \vec{J} = \gamma (\vec{E} - \vec{E}_H)$ or $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ (p. 1.2)

\Rightarrow on retrouve: $\vec{J} = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

or $\vec{J} = nq \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{J}}{nq} = C_H \vec{J}$

$\Rightarrow \vec{J} = \gamma (\vec{E} + C_H \vec{J} \wedge \vec{B})$

1.7)



* \vec{J} est porté par $+\vec{u}_x$

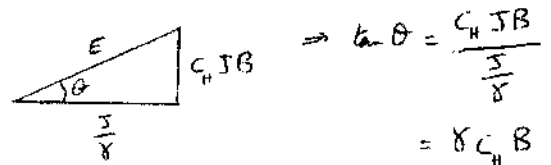
* semi-conducteur de type P $\Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow C_H > 0$

$\Rightarrow C_H \vec{J} \wedge \vec{B} \propto \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z \propto -\vec{u}_y$

* or $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} - \underbrace{C_H \vec{J} \wedge \vec{B}}_{\substack{\propto +\vec{u}_y \\ E + \vec{u}_y}}$

* $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow \vec{E} \perp$ équipotentielles.

1.8)



$\Rightarrow \theta = \text{Arctan}(\gamma C_H B) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 5^\circ$

2- Capteur de courant à effet Hall

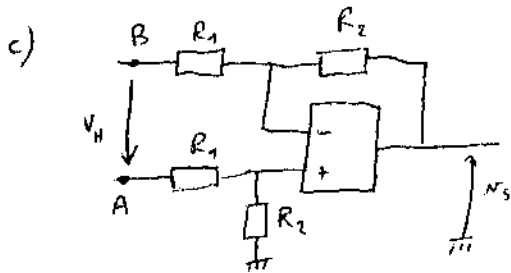
2-1) Capteur de courant à boucle ouverte

a) $V_H = \frac{C_H}{R} I B$ or $B = \frac{\mu_0 I_P}{r}$

$$\Rightarrow V_H = \frac{\mu_0 C_H}{R^2} I I_P = K I I_P \text{ avec } K = \frac{\mu_0 C_H}{R^2}$$

b) $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ VA}^{-2}$

$V_H = 0,01 \text{ V}$



* AO idéal $\Rightarrow i_+ = i_- = 0$

* Boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse de l'AO \Rightarrow régime linéaire $\Rightarrow V_+ = V_-$

* diviseur de tension $\Rightarrow V_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_A$

$$\Rightarrow V_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_A$$

* Théorème de Thévenin sur l'entrée inverseuse

$$V_- = \frac{V_B}{R_1} + \frac{N_S}{R_2} = \frac{R_2 V_B + R_1 N_S}{R_1 + R_2}$$

$$\text{or } V_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_A \Rightarrow R_2 V_A = R_2 V_B + R_1 N_S$$

$$\Rightarrow N_S = R_2 \underbrace{(V_A - V_B)}_{V_H} \times \frac{1}{R_1}$$

$$\Rightarrow N_S = \frac{R_2}{R_1} V_H$$

d) $N_S = \frac{R_2}{R_1} V_H = \frac{R_2}{R_1} K I I_P = k_s I_P$

$$\Rightarrow k_s = \frac{R_2}{R_1} K I \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{k_s}{K I} = 500$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 500$$

Par exemple, $R_1 = 100 \Omega$
et $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$.

2-2) Capteur de courant à boucle fermée :

a) $\frac{dW_m}{dt} = \frac{B_s^2}{2\mu_0} \Rightarrow W_m = \frac{B_s^2}{2\mu_0} S l$

$$\text{or } B_s^2 = \frac{\mu_0^2 N_s^2 i_s^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N_s^2 S}{r} i_s^2 = \frac{1}{2} L i_s^2$$

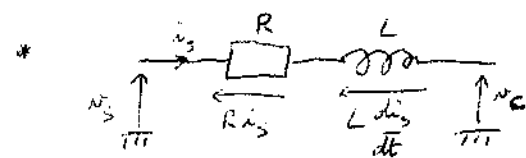
$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N_s^2 S}{r} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

b) * $V_H = \frac{C_H}{R} I B$ avec $B = \frac{\mu_0 I_P}{r} = \frac{\mu_0 N_s i_s}{r}$

$$\Rightarrow V_H = \frac{\mu_0 C_H I}{R^2} (i_P - N_s i_s)$$

$$\Rightarrow N_s = A V_H = \frac{\mu_0 A C_H I}{R^2} (i_P - N_s i_s)$$

* $N_c = R_c i_s$



$$\Rightarrow N_S - N_C = R i_s + L \frac{di_s}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 A C_H I}{R^2} (i_P - N_s i_s) - R_c i_s = R i_s + L \frac{di_s}{dt}$$

$$\Rightarrow L \frac{di_s}{dt} + \left(R + R_c + \frac{\mu_0 A C_H I N_s}{R^2} \right) i_s = \frac{\mu_0 A C_H I}{R^2} i_P$$

$$\Rightarrow T \frac{di_s}{dt} + i_s = \alpha i_P$$

$$\text{avec } T = \frac{L}{R + R_c + \frac{\mu_0 A C_H I N_s}{R^2}}$$

$$\text{et } \alpha = \frac{\frac{\mu_0 A C_H I}{R^2}}{R + R_c + \frac{\mu_0 A C_H I N_s}{R^2}}$$

c) $T = 7 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ et $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$

d) * Pour $t < 0$, $i_P = 0 \Rightarrow T \frac{di_s}{dt} + i_s = 0$

$$\Rightarrow i_s = K' e^{-t/T} \text{ avec } T \text{ très petit}$$

$$\Rightarrow i_s = 0 \Rightarrow N_c = R_c i_s = 0$$

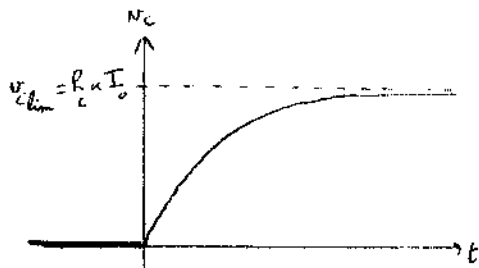
* $t=0$, continuité de i_s ou continuité du courant dans une bobine $\Rightarrow v_c(t=0) = 0$

* $t > 0$, $\tau \frac{di_s}{dt} + i_s = \alpha I_0$

$\Rightarrow i_s = K e^{-t/\tau} + \alpha I_0$

à $t=0$, $i_s = 0 \Rightarrow i_s = \alpha I_0 (1 - e^{-t/\tau})$

$\Rightarrow v_c = R_c \alpha I_0 (1 - e^{-t/\tau})$



$v_c^{\text{lim}} = R_c \alpha I_0$

$\Rightarrow \frac{v_c^{\text{lim}}}{I_0} = \alpha R_c = 2 \cdot 10^{-3} \Omega$

PARTIE C : Etude d'un wattmètre électronique

1- Puissance active

1-1) on passe en notation complexe : $\underline{v} = V_n e^{j\omega t}$
 $\underline{i} = I_n e^{j(\omega t - \varphi)}$

on a $\underline{v} = \underline{Z} \underline{i} = (R + jX) \underline{i}$

$\Rightarrow V_n e^{j\omega t} = (R + jX) I_n e^{j\omega t} e^{-j\varphi}$

$\Rightarrow I_n e^{-j\varphi} = \frac{V_n}{R + jX}$

* $I_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

* $-\varphi = \arg\left(\frac{V_n}{R + jX}\right) = -\arg(R + jX)$

$\Rightarrow \varphi = \arg(R + jX)$

$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{X}{R} \rightarrow \varphi = \arctan \frac{X}{R}$

* dipôle inductif : $X = L\omega > 0$

$\Rightarrow \cos \varphi > 0$ et $\sin \varphi > 0 \Rightarrow \varphi > 0$

1-2) $P = \langle v(t) \cdot i(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{v} \underline{i}^*)$
 $= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_n e^{j\omega t} I_n e^{-j(\omega t - \varphi)})$
 $= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_n I_n e^{j\varphi}) = \frac{V_n I_n \cos \varphi}{2}$

$P = \frac{V_n I_n \cos \varphi}{2}$

1-3) $I_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{360}{\sqrt{5^2 + 10^2}}$

$I_n = 29 \text{ A}$

$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{10}{5} = \arctan 2 = 1,1 \text{ rad} = 63^\circ = \varphi$

$P = \frac{V_n I_n \cos \varphi}{2} \Rightarrow P = 2,0 \text{ kW}$

2- Principe du wattmètre électronique

2-1) $\langle v_2 \rangle = -\langle v_1 \rangle = -K \langle v_2 v_2 \rangle$
 $= -K k_u k_f \langle v(t) \cdot i(t) \rangle = -K k_u k_f P$
 $\Rightarrow k_w = -K k_u k_f$

2-2) $P = \frac{\langle v_2 \rangle}{k_w} = \frac{\langle v_2 \rangle}{-K k_u k_f} \Rightarrow P = 3,75 \text{ kW}$

3- Etude du moyennneur (filtre passe-bas)

3-1) en A: $V_A = \frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R} + \frac{V_B}{R} + jC_2 \omega \times 0$
 $\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC_2 \omega$

$\Rightarrow V_A = \frac{V_1 + V_2 + V_B}{3 + jRC_2 \omega}$ (1)

en B: (AO idéal $\Rightarrow i_+ = i_- = 0$)

$\Rightarrow V_B = \frac{V_A}{\frac{1}{R} + jC_1 \omega}$

$\Rightarrow V_B = \frac{V_A + jRC_1 \omega V_2}{1 + jRC_1 \omega}$ (2)

3-2) on a une boucle de rétroaction entre l'entrée inverseuse

et la sortie de l'AO \Rightarrow régime linéaire $\Rightarrow V_+ = V_-$

or $V_+ = 0$ et $V_- = V_B \Rightarrow V_B = 0$

(1) $\Rightarrow V_A = \frac{V_1 + V_2}{3 + jRC_2 \omega}$

(2) $\Rightarrow V_A = -jRC_1 \omega V_2$

$\Rightarrow V_1 + V_2 = -jRC_1 \omega (3 + jRC_2 \omega) V_2$

$V_1 = (-1 - 3jRC_1 \omega + R^2 C_1 C_2 \omega^2) V_2$

$I = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-1}{1 + 3jRC_1 \omega - R^2 C_1 C_2 \omega^2}$

3-3) $I = \frac{T_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

on identifie

$$T_0 = -1 \quad \omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C_1 C_2} \quad \frac{2m}{\omega_c} = 3RC_1$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}} \quad m = \frac{3}{2} RC_1 \omega_0$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

$$3.4) \frac{2m}{\omega_0} = 3RC_1 \Rightarrow C_1 = \frac{2m}{3R\omega_0} = \frac{m}{3R\pi f_0}$$

$$\Rightarrow C_1 = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ F} = 32 \text{ nF}$$

$$C_2 = \frac{1}{R^2 C_1 \omega_0^2} = \frac{1}{5\pi^2 f_0^2 R^2 C_1} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ F}$$

$$C_2 = 140 \text{ nF}$$

$$3.5) * \omega \rightarrow 0, \underline{T} \rightarrow T_0 = -1$$

$$|I| \rightarrow 1 \quad G \rightarrow 0$$

$$\varphi \rightarrow \pm \pi ?$$

$$* \omega \rightarrow \infty, \underline{T} \rightarrow \frac{-1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$\varphi \rightarrow 0$$

$$G \rightarrow 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega$$

pente à -20 dB/décade

$$* \omega = \omega_0, \underline{T} = \frac{-1}{1 + 2j\omega_0 m - 1} = \frac{-1}{2j\omega_0 m} = \frac{j}{2m}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow \text{pour } \omega \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \pi)$$

$$|I| = \frac{1}{2m} \Rightarrow G = -20 \log 2m = -20 \log \sqrt{2} = -3 \text{ dB}$$

$$* \text{intersection des asymptotes: } 0 = 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega$$

$$\Rightarrow \text{pour } \omega = \omega_0 \quad (f = f_0 = 5 \text{ Hz})$$

$$3.6) \underline{T} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2}$$

$$\underline{V}_2 \left(1 + \frac{2m}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2 \right) = -\underline{V}_1$$

$$\text{ou } x j\omega \Rightarrow \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 V_2}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{dV_2}{dt} + V_2 = -V_1$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dV_2}{dt} + \omega_0^2 V_2 = -\omega_0^2 V_1$$

$$3.7) v_1 = K h_u h_b v_2 = K h_u h_b v(t) i(t)$$

$$v_1 = K h_u h_b V_n I_n \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$$

$$= K h_u h_b V_n I_n \cos \omega t (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi)$$

$$= K h_u h_b V_n I_n (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)$$

$$= K h_u h_b V_n I_n \left(\frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \sin \varphi \right)$$

$$= \frac{K h_u h_b V_n I_n}{2} (\cos \varphi + \underbrace{\cos 2\omega t \cos \varphi + \sin 2\omega t \sin \varphi}_{\cos(2\omega t - \varphi)})$$

$$v_1 = \frac{K h_u h_b V_n I_n}{2} (\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi))$$

\$\Rightarrow v_1\$ est donc la somme de 2 termes :

$$* \frac{K h_u h_b V_n I_n}{2} \cos \varphi : \text{ tension continue} = \langle v_1 \rangle$$

$$* \frac{K h_u h_b V_n I_n}{2} \cos(2\omega t - \varphi) : \text{ composante alternative de pulsation } 2\omega.$$

Chacune de ces tensions va donner une tension en sortie

$$* \text{ tension continue: } \omega = 0 \Rightarrow \underline{T} = -1$$

$$\Rightarrow v_2 = -\langle v_1 \rangle$$

$$* \text{ composante alternative: pulsation } 2\omega = 200\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{200\pi}{10\pi} = 20$$

$$\Rightarrow |I| = \frac{1}{\sqrt{(1-20)^2 + 4m^2 \cdot 20^2}} = 2,3 \cdot 10^{-2}$$

$$A_n = |I| \times \frac{K h_u h_b V_n I_n}{2} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ V} = A_n$$

$$\frac{A_n}{\langle v_1 \rangle} = \frac{|I|(\omega = 200\pi)}{\cos \varphi} = \frac{2,3 \cdot 10^{-2}}{\cos 1} = 5,4 \cdot 10^{-2} = 5,4\%$$

précision relative de la mesure de P

4 - Capteur de tension

4.1) cf cours : rapport des tensions :

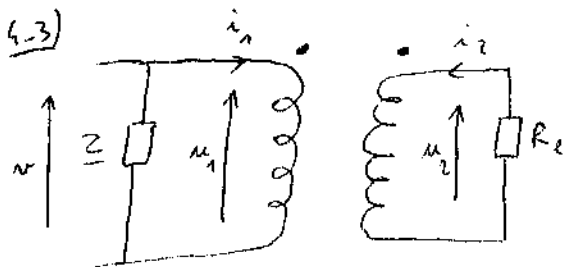
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

rapport des intensités

$$\frac{i_2}{i_1} = - \frac{n_1}{n_2}$$

$$4.2) \frac{n_2}{n_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{230} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = 2,2 \cdot 10^{-2}$$

$$n_1 = 500 \text{ spires} \Rightarrow n_2 = 11 \text{ spires}$$



$$P_c = \langle -u_2 i_2 \rangle = + \langle \frac{u_2^2}{R_e} \rangle$$

↑
convention générateur

$$\text{or } u_2 = \frac{n_2}{n_1} u_1$$

$$\Rightarrow P_c = \frac{n_2^2}{n_1^2 R_e} \langle u_1^2 \rangle$$

$$\text{or } u_1 = v \quad (\text{branchement en } \parallel)$$

$$\Rightarrow P_c = \frac{n_2^2}{R_e n_1^2} \langle v^2 \rangle$$

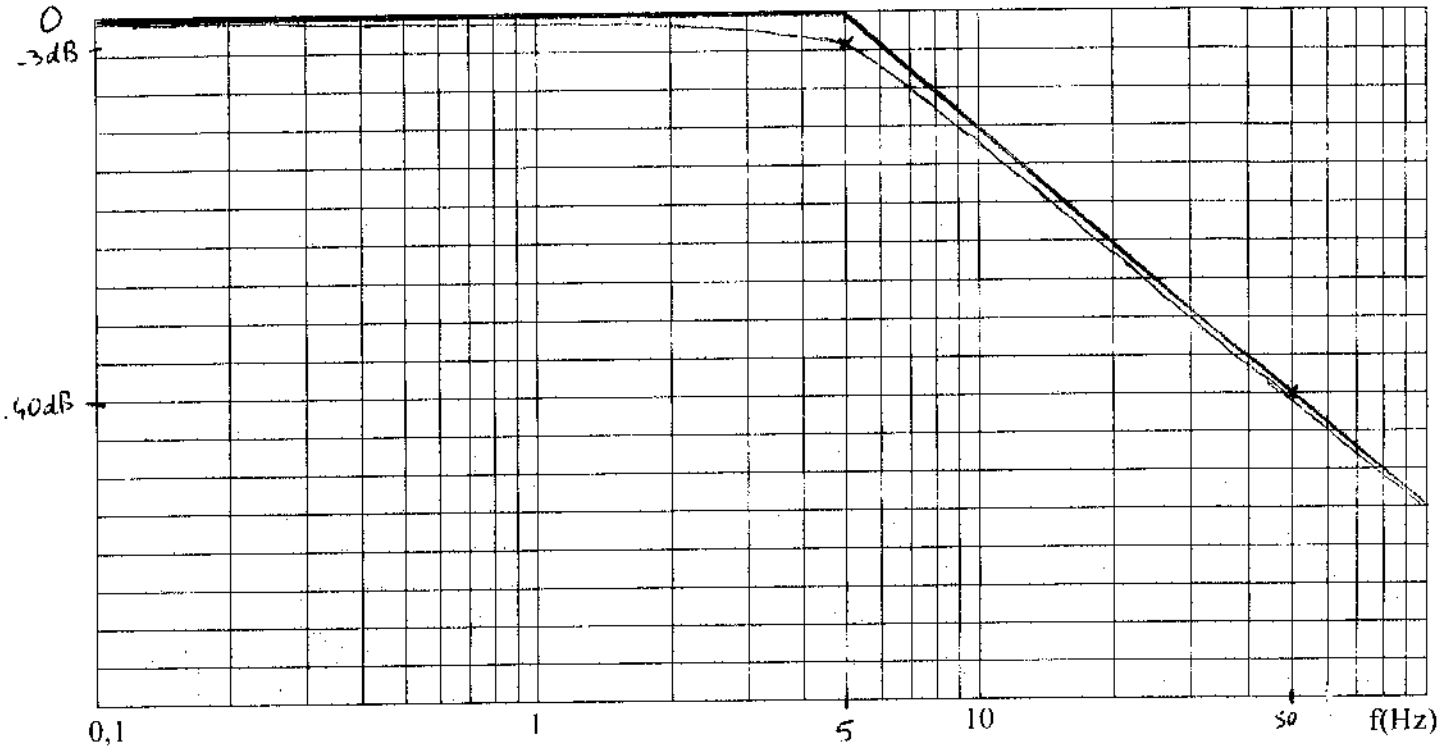
$$P_c = \frac{n_2^2 V_m^2}{n_1^2 R_e} \underbrace{\langle \cos^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}}$$

$$P_c = \frac{n_2^2 V_m^2}{2 n_1^2 R_e} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ W} \ll 2,0 \text{ kW} \quad (\text{question 1.3})$$

Le capteur ne perturbe presque pas le montage.

Document réponse à rendre avec la copie

Gain



Phase

