

\* Banque filière PT \*

## Epreuve de Sciences Industrielles I

Durée 5 h

### Documents remis au candidat

- Le texte du sujet (15 pages numérotées de 1 à 15) ;
- 3 feuilles de réponse (annexes 1, 2, 3) à rendre avec la copie.

### Structure de l'épreuve

L'épreuve comporte quatre parties indépendantes :

- A-Automatique ;
- B-Cinématique ;
- C-Statique ;
- D-Dynamique.

### Notations

Le torseur cinématique du mouvement d'un solide  $i$  par rapport à un solide  $j$  sera noté  $V_{i/j}$ .

Les éléments de réduction au point  $A$  de ce torseur s'écriront  $V_{i/j} \equiv \begin{Bmatrix} \overline{\Omega}_{i/j} \\ \overline{V}_{Ae/i/j} \end{Bmatrix}$ .

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison quelconque  $q$  entre deux solide  $i$  et  $j$  sera noté  $M_{j \rightarrow i}^q$ .

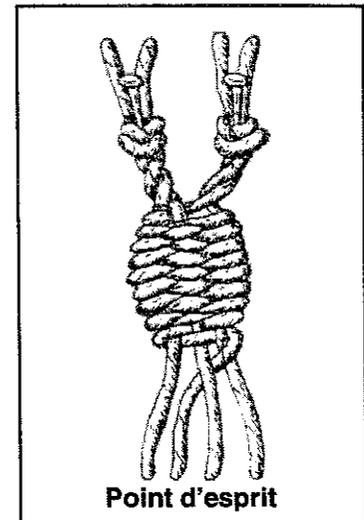
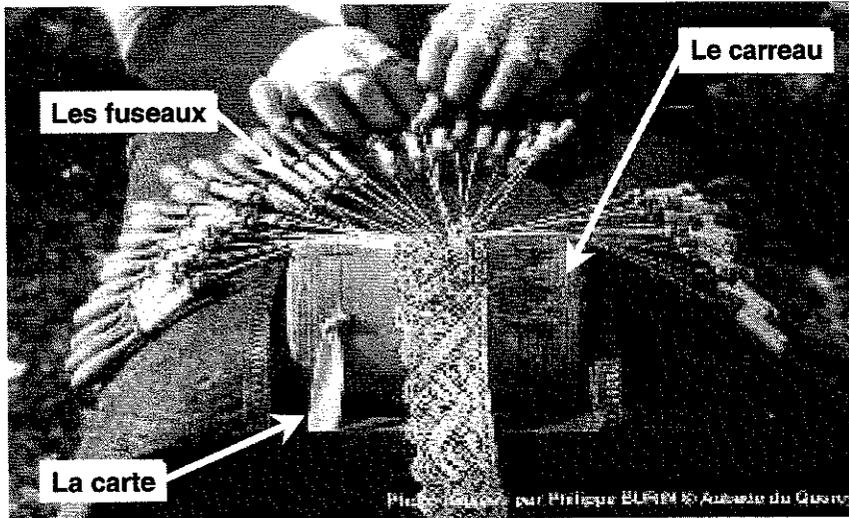
Les éléments de réduction au point  $A$  de ce torseur s'écriront  $M_{j \rightarrow i}^q \equiv \begin{Bmatrix} \overline{F}_{j \rightarrow i}^q \\ \overline{M}_{A,j \rightarrow i}^q \end{Bmatrix}$ .

Le torseur dynamique d'un ensemble matériel  $S$  en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  sera noté  $\Delta_{S/R}$ .

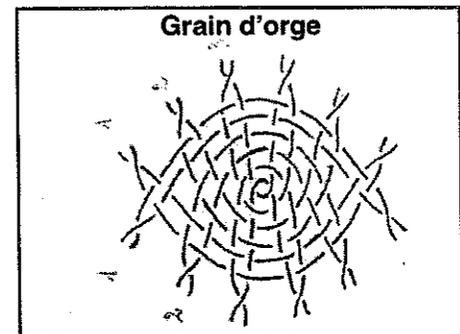
Les éléments de réduction au point  $A$  de ce torseur s'écriront  $\Delta_{S/R} \equiv \begin{Bmatrix} \overline{D}_{S/R} \\ \overline{\delta}_{A,S/R} \end{Bmatrix}$ .

# PRÉSENTATION ET CONTEXTE HISTORIQUE

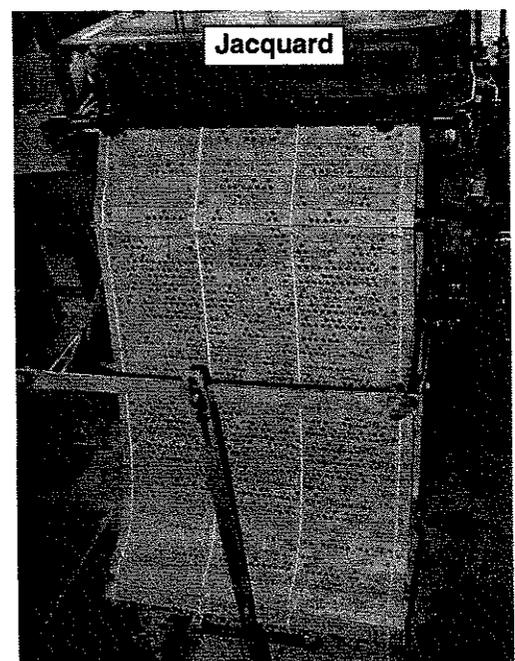
On reconnaît la dentelle du Puy, dont la fabrication est attestée depuis le début du 15<sup>ème</sup> siècle dans la région du Velay, à ses célèbres motifs : « grains d'orge » et « points d'esprit », « mats » et « grilles ».

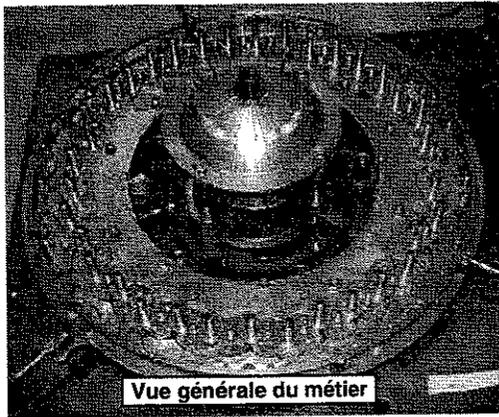


Le matériel utilisé à l'origine par les dentellières se compose d'un « carreau » ou « coussin » dans lequel on peut planter des épingles afin de maintenir les points ainsi que d'un grand nombre de « fuseaux » sur lesquels sont enroulés les fils. Le modèle de la dentelle est représenté par une « carte » sur laquelle les motifs à réaliser sont dessinés et codifiés. Le travail de l'ouvrière consiste à déplacer successivement des fuseaux adjacents de manière à créer des croisements entre des fils voisins.



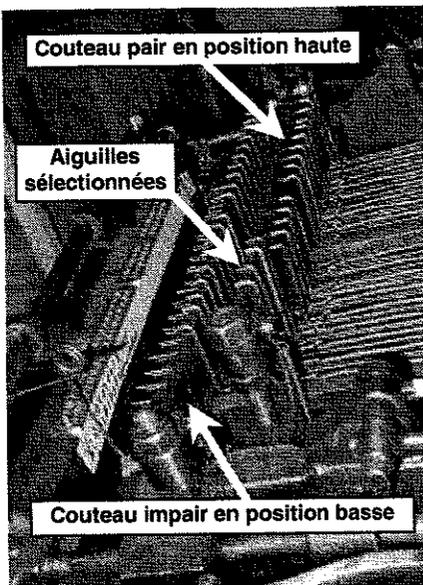
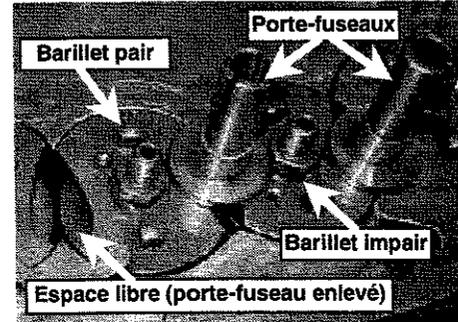
Les premiers métiers mécaniques ont été installés au Puy en Velay au début du XX<sup>e</sup> siècle. Leur fonctionnement reproduit le travail manuel des dentellières, mais permet d'effectuer simultanément les mouvements qui peuvent l'être.





Les fuseaux, en acier et non plus en bois, sont disposés sur un cercle. La « carte » est remplacée par une suite de lattes de carton perforées, le « jacquard », dont les trous représentent les croisements successifs qu'il faut effectuer pour réaliser le motif souhaité. À chaque cycle, un dispositif mécanique lit le jacquard, permute simultanément les couples de fuseaux dont les fils doivent être croisés, puis déplace le jacquard d'un pas.

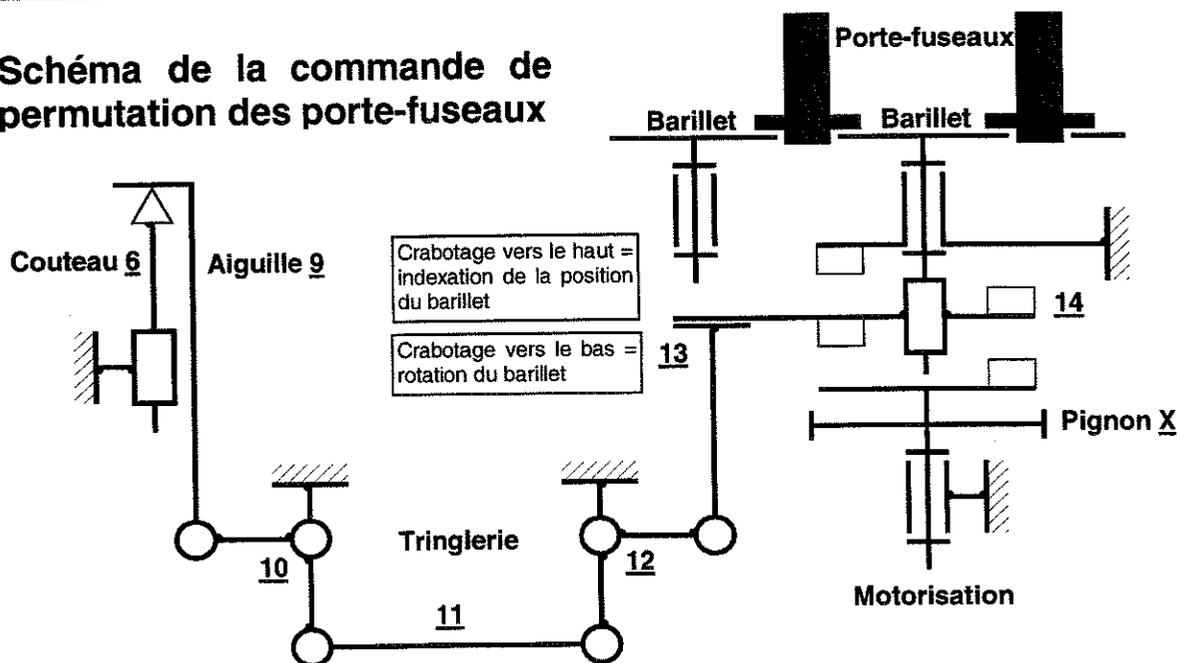
Chaque fuseau repose, par l'intermédiaire de son porte-fuseau, dans l'espace libre formé par les encoches de deux barillets contigus. Le croisement de deux fils voisins est obtenu en faisant tourner d'un demi tour le barillet qui leur est commun, tandis que le bâti et les deux barillets situés de part et d'autre, immobiles, guident la base du porte-fuseau. Un dispositif de crabotage individuel, commandé par le jacquard, provoque la mise en rotation de chaque barillet.



Un fil peut être croisé soit avec son voisin de droite, soit avec celui de gauche, mais jamais avec les deux simultanément ; le jacquard sélectionne donc alternativement des barillets dont le numéro est pair pour leur faire effectuer un demi-tour dans le sens horaire, puis des barillets impairs qui, eux, tournent d'un demi-tour dans le sens trigonométrique.

Lorsqu'un barillet pair doit effectuer un demi-tour, le jacquard le sélectionne en amenant son « aiguille » au dessus du « couteau » pair. Dans la seconde partie du cycle, ce sont les aiguilles impaires qui sont déplacées au dessus du couteau impair. Le déplacement vertical de chaque couteau, commandé par une came, soulève simultanément toutes les aiguilles sélectionnées par le jacquard ; un système de tringles et de renvois provoque le crabotage des barillets correspondants.

### Schéma de la commande de permutation des porte-fuseaux



Face aux contraintes imposées par l'environnement économique d'aujourd'hui, un atelier de dentellerie traditionnel manque essentiellement de flexibilité :

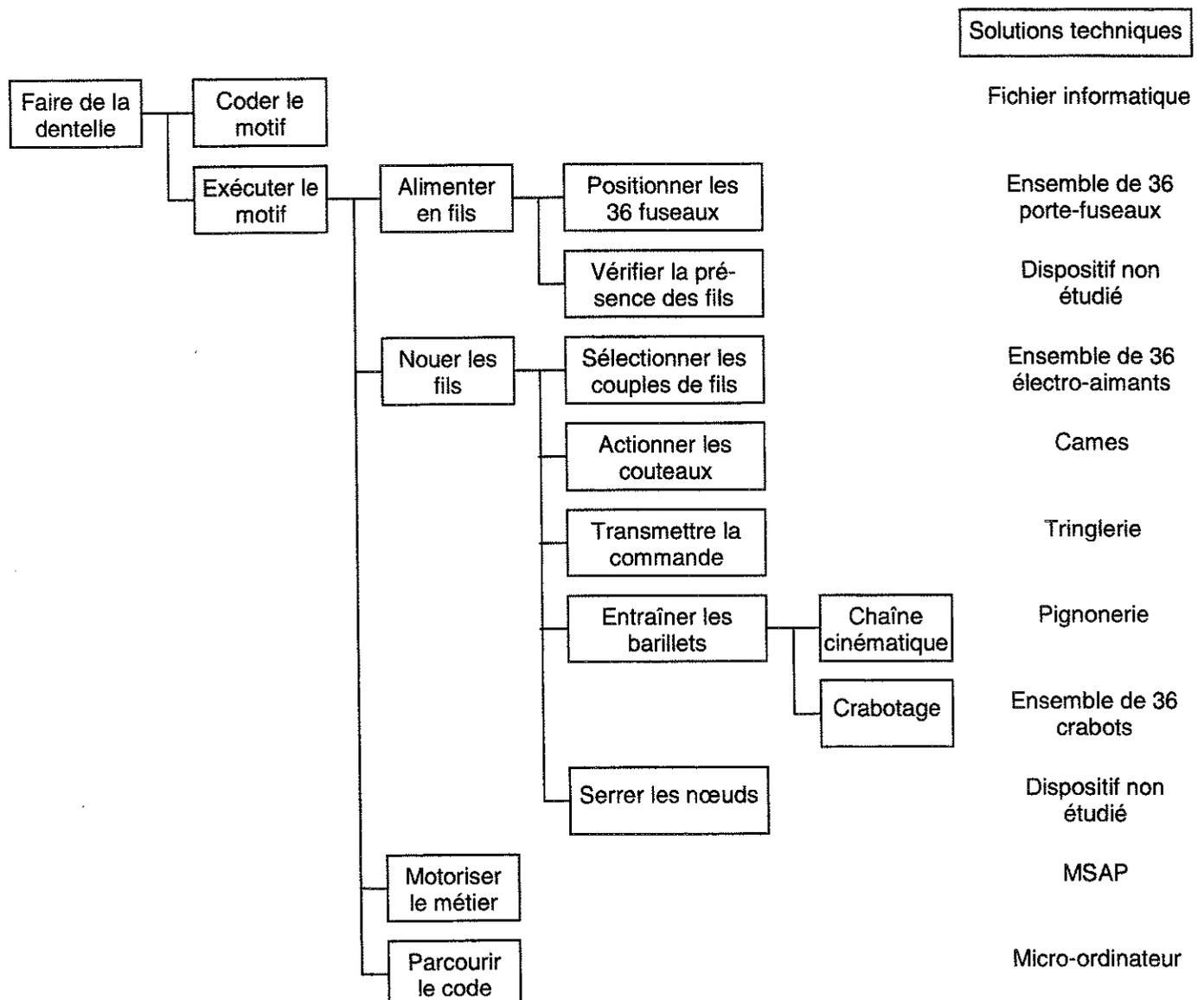
- Chaque métier doit être équipé d'un jacquard particulier, dont la fabrication et la duplication sont particulièrement longues et fastidieuses : il faut en effet perforer les lattes de carton une par une, puis les coudre entre elles. La moindre modification du modèle de dentelle impose le démontage puis le remontage du jacquard.
- La distribution de l'énergie mécanique aux différents métiers d'un atelier s'effectue à partir d'un moteur unique au moyen de poulies et de courroies ; le dispositif est encombrant, dangereux, et manque de souplesse.
- Certains composants mécaniques présentent des signes d'usure, et supportent mal les tentatives d'augmentation des cadences.

Aussi a-t-on choisi la stratégie suivante pour moderniser les métiers :

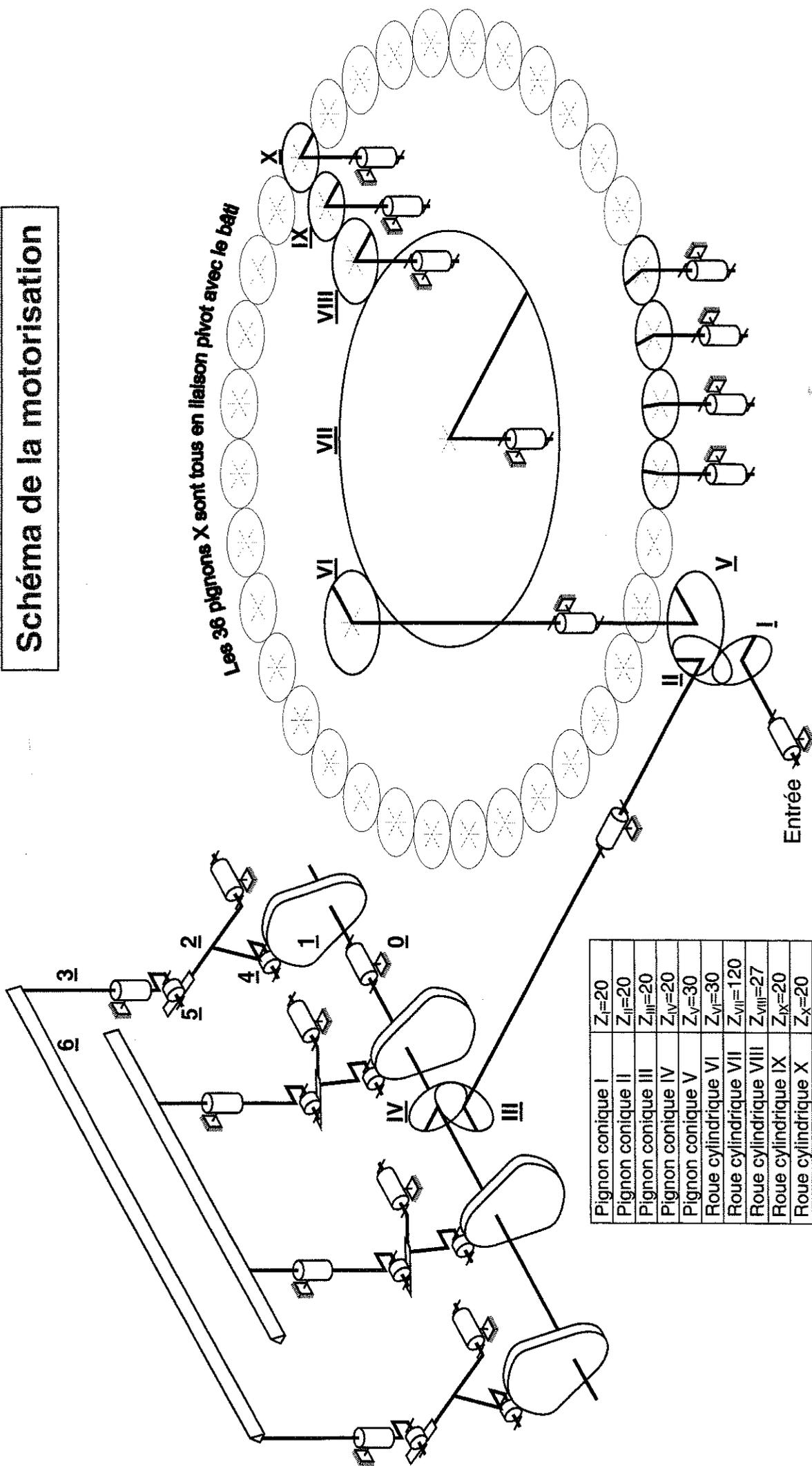
- Conservation de la partie mécanique, qui donne globalement satisfaction ; quelques modifications de détail ont permis d'éliminer des problèmes d'usure excessive au niveau de certains composants.
- Remplacement du jacquard et de son dispositif de lecture par une commande électronique numérique. Des électro-aimants, pilotés par un micro-ordinateur, assurent la sélection des aiguilles.

Mise en place d'une motorisation autonome au moyen d'une machine synchrone autopilotée (MSAP) couplée à un variateur de vitesse. Cet ensemble est commandé en position par le micro-ordinateur.

Ces choix sont résumés dans le diagramme FAST ci-dessous :



# Schéma de la motorisation



# A - AUTOMATIQUE

La motorisation du métier à tisser la dentelle du Puy est réalisée par un moteur communément appelée moteur « brushless ». Ce moteur est alimenté par un variateur. La commande de ce groupe moto-variateur et des aiguilles est pilotée par une commande numérique (système PMAC) embarquée dans un micro ordinateur.

L'architecture du système est donnée sur la figure 1 suivante :

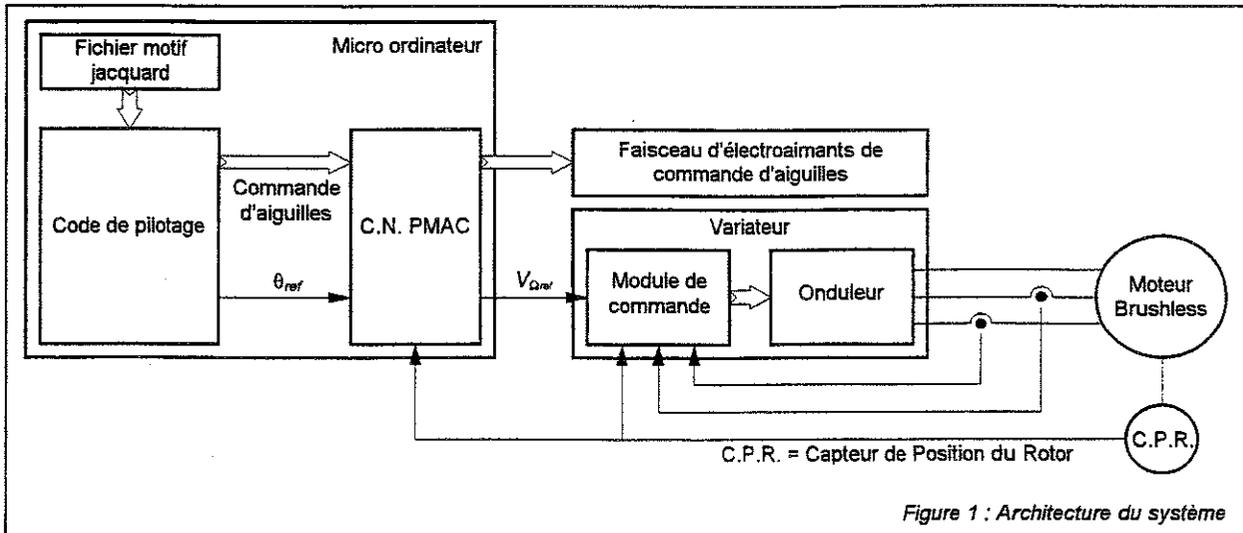


Figure 1 : Architecture du système

L'étude ne portera que sur l'analyse du pilotage du moteur « brushless ». Le contrôle de cet axe met en œuvre :

- un moteur « brushless » alimenté par un système de trois formes d'ondes de tensions alternatives fournies par l'onduleur. Une modélisation permet de développer une commande simple en courant donc en couple. Cette modélisation ne fait pas partie du sujet mais permet de poser  $C(t) = K_t \times I(t)$  (équation analogue à celle d'une machine à courant continu) ;
- un variateur numérique dont le rôle est d'asservir en couple et en vitesse le moteur ;
- une commande numérique dont le rôle est d'asservir en position le moteur en fournissant une référence de vitesse au variateur.

Le système est numérique et non-linéaire. Cependant, la fréquence relativement élevée de découpage et de rafraîchissement des différentes grandeurs ainsi que l'hypothèse de linéarité sur le modèle aux variations permet de modéliser le système sous forme de S.L.I. (Système Linéaire Invariant) continu du temps. On utilisera donc, dans le cadre de cette étude, la transformée de Laplace et la représentation par schémas blocs.

## A.1 Étude de la boucle de courant

La boucle de courant (donc de couple) est présentée sur la figure 2 ci-après.

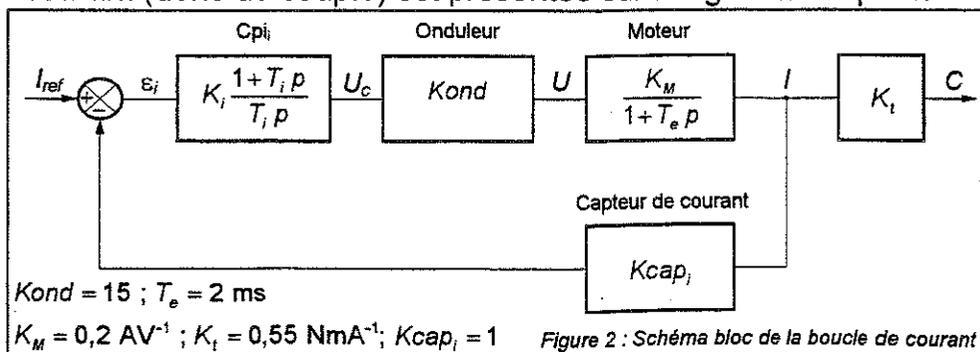


Figure 2 : Schéma bloc de la boucle de courant

A.1.1 Donner sous forme canonique et littérale (sans faire intervenir de valeurs numériques)

la fonction de transfert en boucle fermée  $FTBF_i(p) = \frac{I(p)}{I_{ref}(p)}$ .

A.1.2 On néglige l'influence du zéro de la  $FTBF_i(p)$ . Déterminer numériquement  $T_i$  et  $K_i$  pour obtenir le comportement d'un second ordre avec :

- un coefficient d'amortissement  $m = 1$  ;
- une pulsation naturelle  $\omega_{BF_i} = 6000 \text{ rad/s}$ .

A.1.3 La réponse temporelle réelle de la boucle de courant à l'échelon unitaire est représentée ci-contre figure 3. Déterminer graphiquement le dépassement  $D$  en %. Conclure quant à l'hypothèse émise à la question A.1.2.

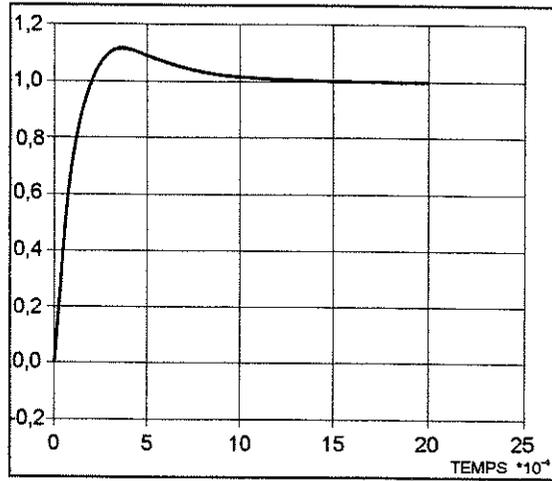
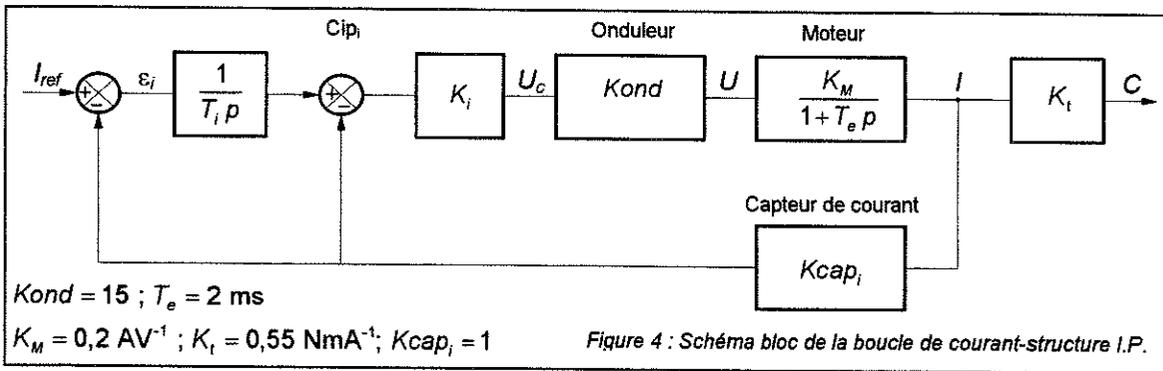


Figure 3 : Réponse temporelle à l'échelon unitaire de la boucle de courant

On considère la nouvelle structure de correcteur intégré dans la boucle de courant présentée figure 4. Cette structure est communément appelée « correcteur de type I.P ».



A.1.4 Donner sous forme canonique et littérale (sans faire intervenir de valeur numérique) la fonction de transfert en boucle fermée  $FTBFI(p) = \frac{I(p)}{I_{ref}(p)}$ .

A.1.5 Comparer avec  $FTBFI(p)$  de la question A.1.1. Conclure.

A.1.6 On assimile  $FTBFI(p)$  à un 1<sup>er</sup> ordre de fonction de transfert  $FTBFI(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{BFI}}}$  avec

$\omega_{BFI} = 6000 \text{ rad/s}$ . Justifier le gain statique unitaire.

## A.2 Étude de la boucle de vitesse

On conserve le modèle approché du 1<sup>er</sup> ordre de la boucle de courant du A.1.6. La boucle de vitesse est présentée sur la figure 5.  $K_{can}$  représente le convertisseur analogique-numérique de l'entrée de référence en vitesse du variateur.

A.2.1 Donner la forme littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_{\Omega}$  du système bouclé (entrée  $\Omega_{ref2}$ ) de la figure 5.

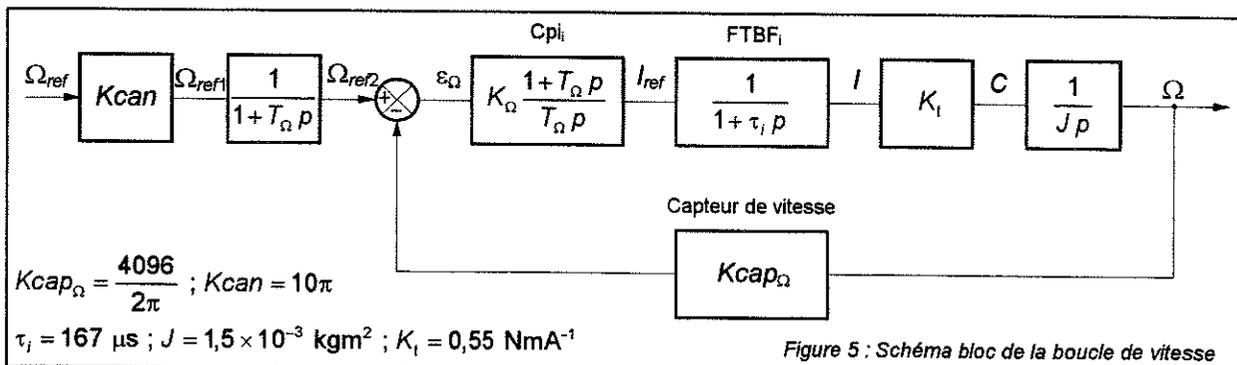


Figure 5 : Schéma bloc de la boucle de vitesse

- A.2.2 On pose  $T_\Omega = a \times \tau_i$  avec  $a > 1$ . Tracer avec soin sur la copie et en indiquant les valeurs remarquables, l'allure du diagramme asymptotique de Bode en gain et en phase de  $FTBO_\Omega$  (le tracé sera effectué avec la forme littérale, on ne placera pas l'axe des 0dB sur la courbe de gain).
- A.2.3 Déterminer la dérivée de la phase de  $FTBO_\Omega$  par rapport à  $\omega$ . Déterminer la pulsation  $\omega_1$  en fonction de  $a$  et  $\tau_i$  pour laquelle cette dérivée s'annule. Montrer que la pulsation  $\omega_1$  est la moyenne géométrique sur l'axe des abscisses des deux pulsations de coupures intervenant dans le diagramme de Bode du A.2.2.
- A.2.4 Placer sur le diagramme de Bode du A.2.2 l'axe des 0dB passant par  $\omega_1$ . Ce réglage assure au système une marge de phase maximale.
- A.2.5 Donner l'expression de la marge de phase  $M_\phi$  sous la forme  $M_\phi = \text{Arg}(\alpha + j\beta)$  avec  $\text{Arg} = \text{argument du complexe } \alpha + j\beta$ . ( $\alpha$  sera une constante et  $\beta$  sera fonction de  $a$ ). Exprimer le sinus de  $M_\phi$  en fonction de  $a$ .
- A.2.6 Déterminer la valeur numérique de  $a$  qui permet d'obtenir  $M_\phi = 62^\circ$ .
- A.2.7 En déduire la valeur numérique de  $T_\Omega$ .
- A.2.8 Déterminer  $K_\Omega$  en fonction de  $a$ ,  $\tau_i$ ,  $K_{cap_\Omega}$ ,  $J$  et  $K_t$  pour que la courbe de gain coupe l'axe des 0dB en  $\omega_1$ . Effectuer l'application numérique.
- A.2.9 Déterminer sous forme canonique et numérique la fonction de transfert en boucle fermée de vitesse  $FTBF_\Omega(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_{ref}(p)}$ . Par analogie avec l'étude de la boucle de courant

donner le rôle de la transmittance  $\frac{\Omega_{ref2}(p)}{\Omega_{ref1}(p)} = \frac{1}{1 + T_\Omega p}$ .

- A.2.10 On assimile la fonction de transfert en boucle fermée de vitesse  $FTBF_\Omega$  à un 1<sup>er</sup> ordre de fonction de transfert :  $FTBF_\Omega(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{K_{BF\Omega}}{1 + \frac{p}{\omega_{BF\Omega}}}$ .

On pose  $\omega_{BF\Omega} = \omega_1$ . Déterminer les valeurs numériques de  $K_{BF\Omega}$  et  $\omega_{BF\Omega}$ .

### A.3 Étude de la boucle de position

On conserve le modèle approché du 1<sup>er</sup> ordre de la boucle de vitesse du A.2.10. La boucle de position est présentée figure 6. Le gain  $Kcna$  représente le convertisseur numérique analogique de sortie de la commande numérique PMAC.

On pose  $\omega_{BF\Omega} = \frac{1}{\tau_\Omega}$ .

- A.3.1 Donner sous forme canonique la fonction de transfert en boucle fermée  $FTBF_\theta(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_{ref}(p)}$  (ne faire intervenir aucune valeur numérique).
- A.3.2 Déterminer  $K_\theta$  de telle sorte que la réponse à un échelon de position s'effectue sans dépassement et en un temps de réponse minimum.

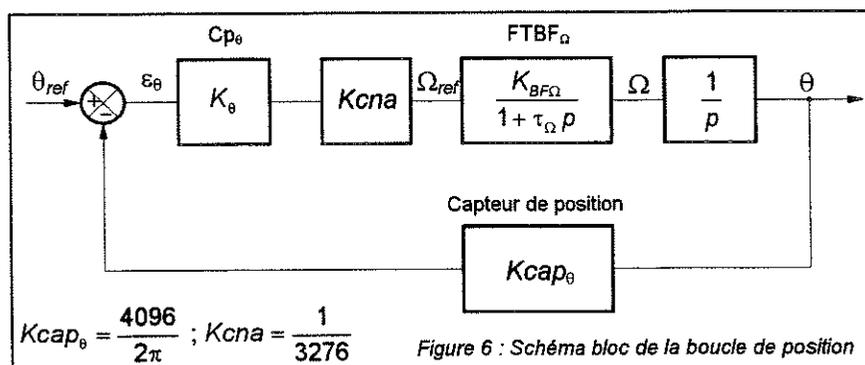


Figure 6 : Schéma bloc de la boucle de position

## B - CINÉMATIQUE (FIGURE 7 – PAGE 14)

Le but de l'étude est de déterminer la course du coulisseau **3** ainsi que les vitesses de rotation  $\omega_{4/2}$  et  $\omega_{5/3}$  des roulettes **4** et **5**.

Dans toute l'étude qui suit, on considère que les mouvements sont plans de normale  $\vec{x}_0$ .

### Paramétrage

Le mécanisme étudié est constitué de 6 solides :

Bâti **0** ; Repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;

Came **1** ; Repère  $(O, \vec{x}_1 = \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;

Levier **2** ; Repère  $(A, \vec{x}_2 = \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  ;

Coulisseau **3** ; Repère  $(C, \vec{x}_3 = \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  ;

Roulette **4** ; Repère  $(B, \vec{x}_4 = \vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  ;

Roulette **5** ; Repère  $(C, \vec{x}_5 = \vec{x}_0, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ .

Le tableau ci-dessous récapitule le paramétrage adopté.

Liaison	Positionnement	Orientation
<b>1/0</b> : pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$	$\overline{OO} = \vec{0}$	$(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha$
<b>2/0</b> : pivot d'axe $(A, \vec{x}_0)$	$\overline{OA} = a \vec{z}_0$ $a$ constante géométrique	$(\vec{y}_0, \vec{y}_2) = \beta$
<b>3/0</b> : glissière de direction $\vec{z}_0$	$\overline{OC} = c \vec{y}_0 + \lambda \vec{z}_0$ $\lambda$ paramètre linéaire $c$ constante géométrique	$(\vec{y}_0, \vec{y}_3) = 0$
<b>4/2</b> : pivot d'axe $(B, \vec{x}_0)$	$\overline{AB} = b \vec{y}_2 - d \vec{z}_2$ $b$ et $d$ constantes géométriques	$(\vec{y}_2, \vec{y}_4) = \gamma$
<b>5/3</b> : pivot d'axe $(C, \vec{x}_0)$	$\overline{CC} = \vec{0}$	$(\vec{y}_3, \vec{y}_5) = \delta$
<b>4/1</b> : cylindre plan de normale $JB$ et de ligne de contact $(J, \vec{x}_0)$		
<b>5/2</b> : cylindre plan de normale $KC$ et de ligne de contact $(K, \vec{x}_0)$		

### B.1 Étude préliminaire

#### Théorème des trois plans glissants

En fonction du paramétrage donné :

- B.1.1 Écrire les éléments de réduction du torseur cinématique  $\mathcal{V}_{1/0}$  au point  $O$  puis en un point  $M$  quelconque du plan de l'étude  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Utiliser une écriture vectorielle ; ne pas effectuer les produits vectoriels.
- B.1.2 Écrire les éléments de réduction du torseur cinématique  $\mathcal{V}_{2/0}$  au point  $A$  puis au point  $M$ .
- B.1.3 Écrire alors les éléments de réduction du torseur cinématique  $\mathcal{V}_{2/1}$  au point  $M$ .
- B.1.4 Soit  $I_{21}$  le Centre Instantané de Rotation (CIR) du mouvement de 2/1. Montrer que le point  $I_{21}$  appartient à la droite  $OA$  et que :

$$\frac{\overline{OI_{21}}}{\beta} = \frac{\overline{AI_{21}}}{\alpha} = \frac{\overline{OA}}{\beta - \alpha}$$

Ce résultat se généralise sous la forme du théorème des trois plans glissants :

Soient trois solides  $S_i, S_j, S_k$  en mouvement plan (de normale  $\vec{z}$ ) les uns par rapport aux autres. On appelle  $I_{ij}$ , (respectivement  $I_{jk}, I_{ki}$ ) le centre instantané de rotation du solide  $S_i$  par rapport à  $S_j$  (respectivement  $S_j$  par rapport à  $S_k$  et  $S_k$  par rapport à  $S_i$ ) à un instant donné.

Alors :

- les trois CIR  $I_{ij}, I_{jk}, I_{ki}$  sont alignés ;
- les positions relatives des C.I.R. et les vitesses de rotation des trois solides sont liés par la

relation :

$$\frac{I_{ik}I_{kj}}{\omega_{ij}} = \frac{I_{ji}I_{ik}}{\omega_{jk}} = \frac{I_{kj}I_{ji}}{\omega_{ki}}$$

### Étude du contact 4/1

B.1.5 Quelle condition le vecteur  $\vec{V}_{J \in 4/1}$  doit-il satisfaire pour assurer le maintien du contact entre les solides **4** et **1** au point  $J$  ?

B.1.6 Montrer qu'en tout point  $M$  de la droite  $(JB)$  les vecteurs  $\vec{V}_{M \in 4/1}$  et  $\vec{V}_{J \in 4/1}$  sont colinéaires.

B.1.7 Quelle est la direction du vecteur  $\vec{V}_{B \in 2/1}$  ?

### B.2 Cinématique graphique (annexe 1)

Aucune justification écrite n'est demandée. En revanche, les candidats devront laisser toutes les constructions apparaître sur l'épure. L'utilisation de couleurs est vivement conseillée.

#### Détermination de la vitesse d'un point du coulisseau.

Le vecteur  $\vec{V}_{J \in 1/0}$  est donné sur l'épure.

B.2.1 Déterminer, par une méthode de votre choix, la vitesse  $\vec{V}_{B \in 1/0}$ .

B.2.2 Par composition des vitesses en  $B$  déterminer  $\vec{V}_{B \in 2/0}$  et  $\vec{V}_{B \in 2/1}$ .

B.2.3 Déterminer ensuite  $\vec{V}_{K \in 2/0}$ .

B.2.4 Par composition des vitesses en  $K$  déterminer  $\vec{V}_{K \in 3/0}$  et  $\vec{V}_{K \in 3/2}$ .

#### Mise en place des différents CIR

On considère maintenant que les roulettes **4** et **5** roulent sans glisser en  $J$  et  $K$ .

B.2.5 Identifier sur l'épure les CIR suivants :  $I_{10}, I_{20}, I_{41}$  et  $I_{42}$ .

B.2.6 Mettre alors en place  $I_{21}$ .

B.2.7 Identifier les CIR :  $I_{53}, I_{25}$

Le mouvement de **3** par rapport à **0** est une translation de direction  $\vec{z}_0$ . Le CIR  $I_{30}$  est donc rejeté à l'infini dans la direction  $\vec{y}_0$ .

B.2.8 Mettre en place sur l'épure  $I_{32}$ .

### B.3 Cinématique analytique

#### Recherche des positions extrêmes du coulisseau 3

B.3.1 Quelle condition le vecteur  $\vec{V}_{K \in 3/2}$  doit-il satisfaire pour assurer le maintien du contact entre les solides **5** et **2** au point  $K$  ?

B.3.2 Montrer que  $\vec{V}_{K \in 3/0}$  est nulle si et seulement si  $\vec{V}_{K \in 2/0}$  l'est aussi.

B.3.3 Exprimer  $\omega_{2/0}$  en fonction de  $\omega_{1/0}$  et des valeurs algébriques  $\overline{AI_{21}}$  et  $\overline{OI_{21}}$ . En mesurant sur l'épure, donner la valeur du rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  pour la position étudiée.

B.3.4 Où se trouve le point  $I_{21}$  lorsque le rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  est négatif ?

B.3.5 On suppose  $\omega_{1/0} \neq 0$  ; où le point  $I_{21}$  doit-il se trouver pour avoir  $\omega_{2/0} = 0$  ?

B.3.6 Avec quelle partie de la came **1** le galet **4** est-il en contact lorsque le coulisseau **3** est en position haute ? Même question pour la position basse.

## Cinématique de la liaison 4/2

- B.3.7 Exprimer  $\omega_{4/2}$  en fonction de  $\omega_{2/1}$  et des valeurs algébriques  $\overline{JI_{21}}$  et  $\overline{BJ}$
- B.3.8 Comment les points  $I_{21}$ ,  $J$  et  $B$  sont-ils placés les uns par rapport aux autres lorsque le rapport  $\omega_{4/2}/\omega_{2/1}$  est négatif ?
- B.3.9 Exprimer  $\omega_{2/1}$  en fonction de  $\omega_{1/0}$  et des valeurs algébriques  $\overline{AI_{21}}$  et  $\overline{OA}$ .
- B.3.10 Exprimer  $\omega_{4/2}$  en fonction de  $\omega_{1/0}$  et des mesures algébriques des différents segments.
- B.3.11 Montrer que le rapport  $\omega_{4/2}/\omega_{1/0}$  garde un signe constant.

## Cinématique de la liaison 5/3

- B.3.12 Exprimer  $\omega_{5/3}$  en fonction de  $\omega_{2/0}$  et des mesures algébriques  $\overline{KI_{23}}$  et  $\overline{KC}$ .
- B.3.13 À quelles conditions a-t-on  $\omega_{5/3} = 0$  ?

## Conclusion

- B.3.14 La vitesse  $\omega_{1/0}$  est constante ; quelle est la différence essentielle entre les évolutions temporelles des angles  $\gamma$  et  $\delta$  ? Proposer très succinctement des dispositions constructives pour réaliser les liaisons **4-2** et **5-3**.

## C - STATIQUE

On a constaté une usure rapide des paliers  $D$  et  $E$  (annexe 2) de guidage du coulisseau **3**. On se propose d'étudier les actions mécaniques supportées par ces éléments.

### C.1 Étude de l'équilibre du coulisseau 3 (annexe 2)

Les hypothèses sont les suivantes :

- Le problème est plan ;
- Le coulisseau est en position basse, au début de la remontée ;
- L'action du bâti **0** sur le coulisseau **3** est modélisée par deux glisseurs dont les axes centraux passent par les points  $D$  et  $E$  ;
- La liaison coulisseau **3** bâti **0** présente un frottement de coefficient  $f = \tan \varphi$  ;
- La liaison roulette **5** coulisseau **3** est supposée parfaite. L'action de la roulette **5** sur le coulisseau **3** est donc un glisseur de ligne d'action  $(KC)$  avec  $(\vec{z}_3, \overline{KC}) = \beta$  ;
- Enfin, l'effort résistant exercé par les couteaux **6** sur le coulisseau **3** est une force verticale d'intensité  $Q_{63} = 500$  N dirigée vers le bas et appliquée au point  $Q$  de l'axe  $(C, \vec{z}_0)$ .

C.1.1 Déterminer graphiquement  $\overline{D_{0/3}}$ ,  $\overline{E_{0/3}}$  et  $\overline{K_{5/3}}$ .

C.1.2 Donner, sur l'épure, dans le cadre prévu à cet effet, les valeurs des intensités de ces forces.

### C.2 Arc-boutement (annexe 2)

C.2.1 Déterminer graphiquement sur l'épure l'angle  $\beta = \beta_{arc}$  qui provoquerait l'arc-boutement du coulisseau **3**.

C.2.2 Sur quelle(s) disposition(s) constructive(s) peut-on agir pour diminuer les risques d'arc-boutement ?

### C.3 Résistance des Matériaux (annexe 3)

Le coulisseau **3** est modélisé par une poutre cylindrique de section constante. Si on suppose que l'apparition de flambage n'est pas à craindre, on peut n'étudier son comportement qu'à la flexion. On ne prend donc en compte que les efforts tranchants et les moments fléchissants donnés sur l'annexe 3 (différents des résultats obtenus aux questions précédentes).

C.3.1 Tracer le diagramme des efforts tranchants.

C.3.2 Tracer le diagramme des moments fléchissant et donner la valeur de  $Mf_{Maxi}$ .

C.3.3 On rappelle, que pour une poutre cylindrique de diamètre  $\Phi$ ,  $I_{Gx} = \frac{\pi\Phi^4}{64}$ . Quel doit être le diamètre du coulisseau **3** sachant qu'il est réalisé en acier de  $R_{pe} = 100 \text{ N/mm}^2$  ?

## D - DYNAMIQUE (FIGURE 8 – PAGE 15)

### Hypothèses

Dans toute cette partie, toutes les liaisons seront supposées parfaites (pas de frottement). L'objectif de cette partie est d'étudier la stabilité d'un ensemble fuseau + porte-fuseau **8** lors du mouvement de croisement de deux fils, qui conduit à la formation d'un nœud de la dentelle.

La partie inférieure du porte-fuseau comporte deux surfaces fonctionnelles :

- d'une part, un disque plan perpendiculaire à l'axe de l'ensemble, qui entre en contact avec la surface plane horizontale commune au bâti de la machine et au barillet **7** ;
- d'autre part une surface cylindrique de révolution dont la longueur est suffisamment courte devant le rayon pour qu'on puisse modéliser les contacts avec la surface cylindrique de guidage du bâti en *S* et avec le barillet en *R* par des contacts ponctuels de normales *SH* et *RH* respectivement.

On fait l'hypothèse que les contacts sont sans frottement ; on sait que, dans ces conditions, les actions mécaniques transmissibles par les liaisons ne dépendent pas du mouvement relatif entre les surfaces. L'action du bâti sur le porte-fuseau en *S* reste donc toujours un glisseur de ligne d'action *SH* et, du point de vue des efforts, tout se passe comme si le bâti tournait avec le barillet ; par conséquent, le guidage à ce niveau peut aussi bien être modélisé par une liaison sphère-plan de normale *SH* entre le porte-fuseau et le barillet. Il en va naturellement de même pour l'action du bâti au niveau du plan horizontal. Aussi adopte-t-on, pour l'étude dynamique, la modélisation suivante :

- on considère qu'il n'y a pas de liaison entre le porte-fuseau et le bâti ;
- le contact plan est modélisé globalement par un appui plan de normale  $\vec{z}_0$  entre le barillet et le porte-fuseau ;
- les contacts en *S* et *R* sont modélisés par des liaisons sphère-plan de normales *SH* et *RH* entre le barillet et le porte-fuseau ;
- le barillet **7** est lié au bâti par une liaison pivot d'axe  $(F, \vec{z}_0)$  et sa position est repérée par  $(\vec{x}_0, \vec{x}_7) = \theta$ . L'évolution de cet angle au cours du temps est connue : elle est imposée par le moteur de la machine ;
- la position de l'ensemble fuseau + porte-fuseau **8** par rapport au barillet est repérée par l'angle  $(\vec{x}_7, \vec{x}_8) = \varphi$ , dont l'évolution temporelle est inconnue.

### Données complémentaires

- Masse d'un ensemble fuseau + porte-fuseau :  $m_8$
- Moment d'inertie de cet ensemble autour de l'axe  $(G, \vec{z}_0)$  :  $I_8$
- Position du centre géométrique du porte-fuseau  $\overline{FH} = a\vec{x}_7$  avec  $a = 17,5 \text{ mm}$ .
- Position du centre de masse d'un ensemble fuseau + porte-fuseau :  $\overline{HG} = h\vec{z}_0$ .
- Pesanteur :  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$   $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

### D.1 Étude des liaisons

- D.1.1 Donner les éléments de réduction au point *H* du torseur  $\mathcal{H}_{7 \rightarrow 8}^{ap}$  des actions mécaniques transmissibles par la liaison appui-plan (*ap*) entre le barillet **7** et le porte-fuseau **8**.
- D.1.2 Donner le nom et les caractéristiques géométriques de la liaison équivalente aux deux contacts ponctuel en *R* et *S* entre le barillet **7** et le porte-fuseau **8**.
- D.1.3 Donner les éléments de réduction au point *H* du torseur  $\mathcal{H}_{7 \rightarrow 8}^{2cp}$  des actions mécaniques transmissibles par cette liaison (*2cp*).

- D.1.4 Quel est le nom de la liaison équivalente à l'association de la liaison appui-plan ( $ap$ ) et des deux contacts ponctuels ( $2cp$ ) ?
- D.1.5 Quelles sont ses caractéristiques géométriques ?

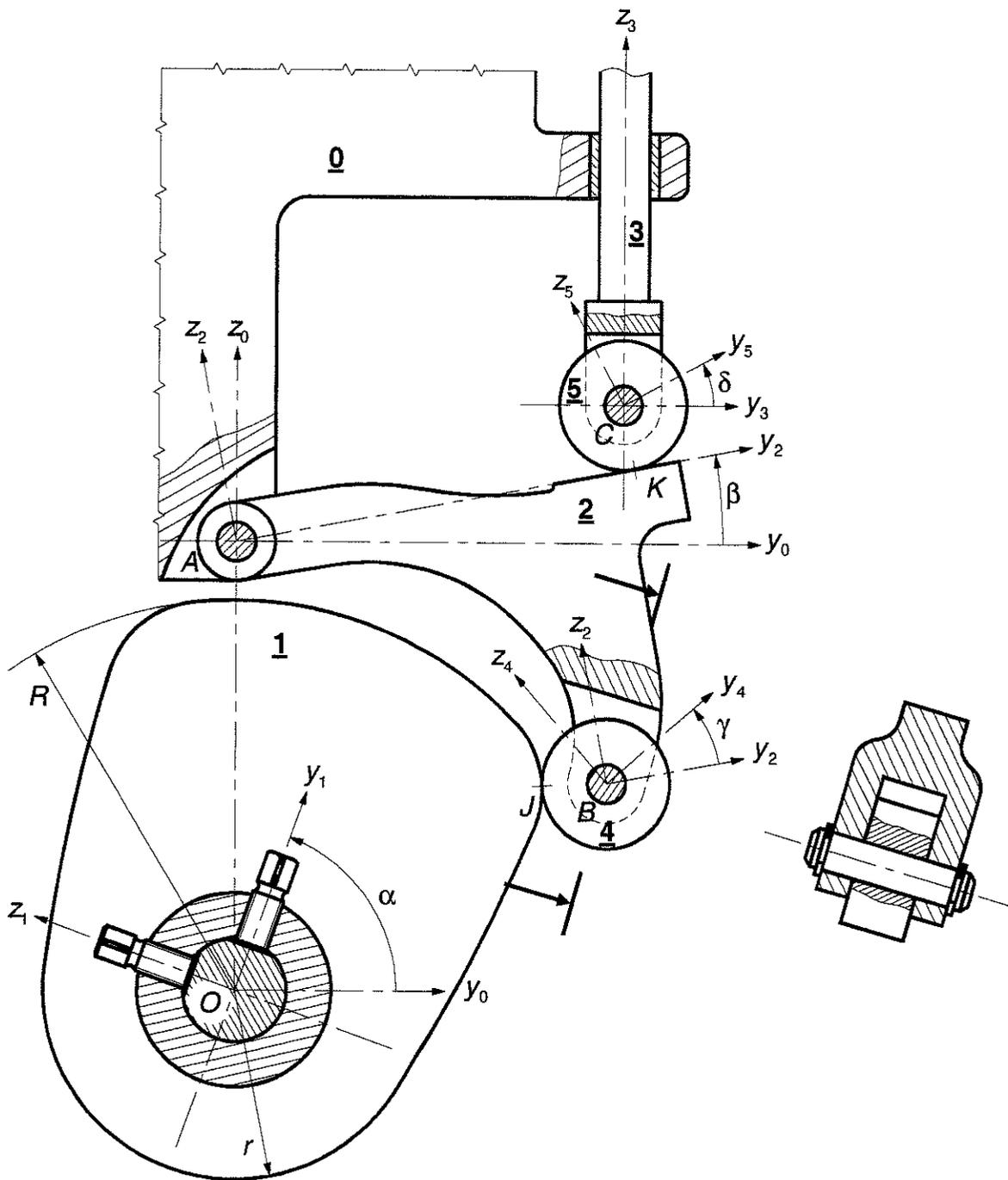
## D.2 Étude du mouvement du porte-fuseau $\mathcal{B}$

- D.2.1 Exprimer, en fonction du paramétrage donné, les éléments de réduction au point  $H$  du torseur cinématique  $\mathcal{V}_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}$  du mouvement du porte-fuseau  $\mathcal{B}$  par rapport au bâti  $\mathcal{O}$ .
- D.2.2 Exprimer les éléments de réduction au point  $H$  du torseur dynamique du porte-fuseau  $\mathcal{B}$  dans son mouvement par rapport au bâti  $\mathcal{O}$ .
- D.2.3 Donner les éléments de réduction au point  $H$  du torseur  $\mathcal{M}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{B}}^g$  des actions gravitationnelles exercées sur le porte-fuseau  $\mathcal{B}$ .
- D.2.4 En appliquant le P.F.D. (Principe Fondamental de la Dynamique) au porte-fuseau  $\mathcal{B}$  dans son mouvement par rapport au bâti  $\mathcal{O}$ , donner l'équation différentielle du mouvement de  $\mathcal{B}$  par rapport à  $\mathcal{O}$ .
- D.2.5 Résoudre cette équation avec des conditions initiales nulles.
- D.2.6 En fonction du résultat précédent, exprimer le torseur cinématique  $\mathcal{V}_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}$ .
- D.2.7 En déduire la nature exacte du mouvement de  $\mathcal{B}$  par rapport à  $\mathcal{O}$ .
- D.2.8 Montrer qu'on peut alors écrire le torseur dynamique  $\Delta_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}$  sous forme de somme de deux glisseurs :
- l'un  $\Delta_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}^c$  indépendant de  $\ddot{\theta}$  ;
  - l'autre  $\Delta_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}^d$  indépendant de  $\dot{\theta}^2$ .
- D.2.9 En appliquant le P.F.D. au porte-fuseau  $\mathcal{B}$  dans son mouvement par rapport au bâti  $\mathcal{O}$ , déterminer les actions mécaniques transmises par les deux liaisons.

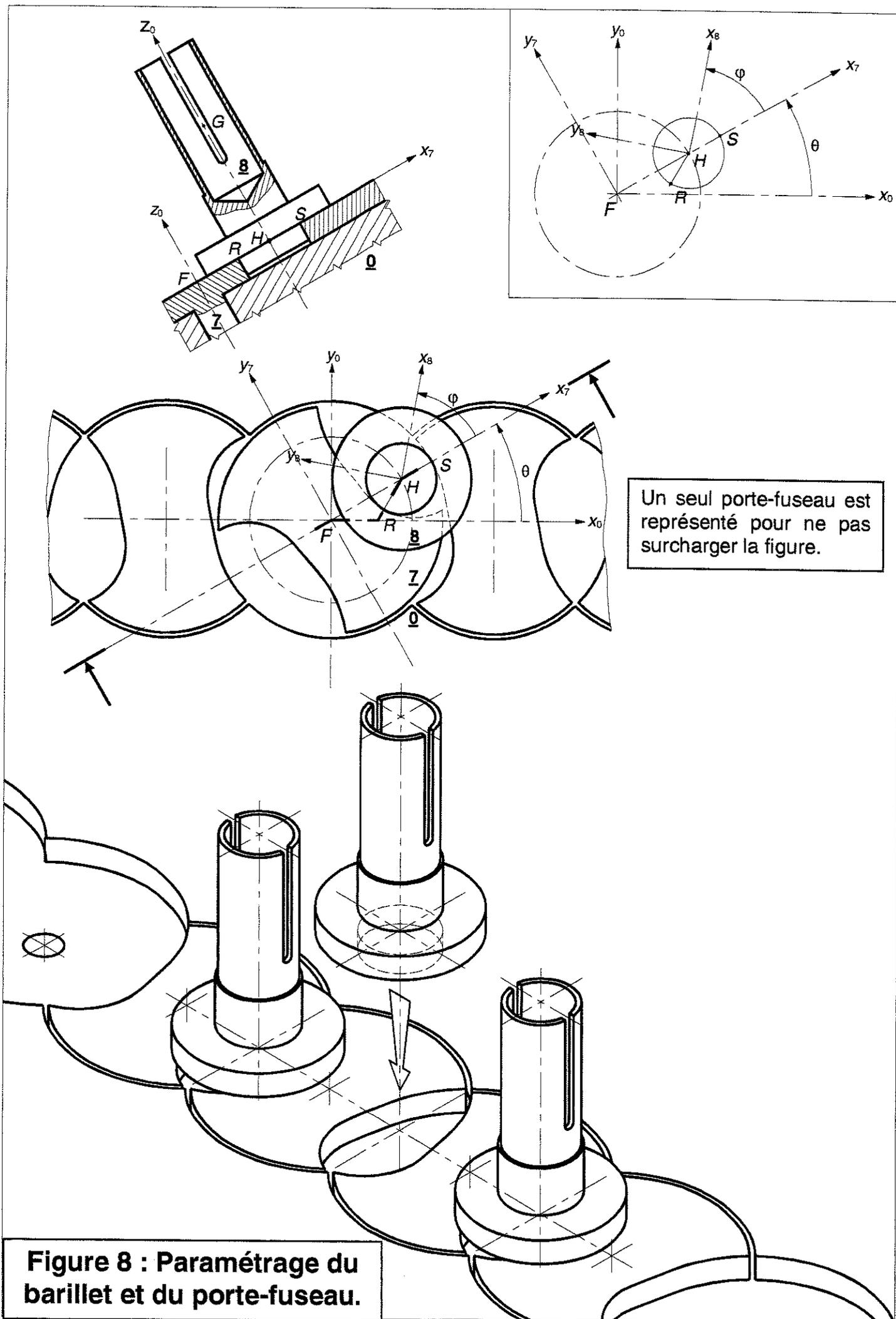
## D.3 Étude du basculement

Si les accélérations sont trop importantes, le porte-fuseau bascule. Sachant que la surface d'appui du porte-fuseau sur le plan commun aux barilletts  $\mathcal{I}$  et au bâti  $\mathcal{O}$  est limitée extérieurement par le cercle de centre  $H$  et de rayon  $r = 15 \text{ mm}$ , le basculement intervient autour d'un point  $P$  de ce cercle tel que  $\overline{HP} = r \vec{u}$  et  $(\vec{x}_7, \vec{u}) = \psi$ .

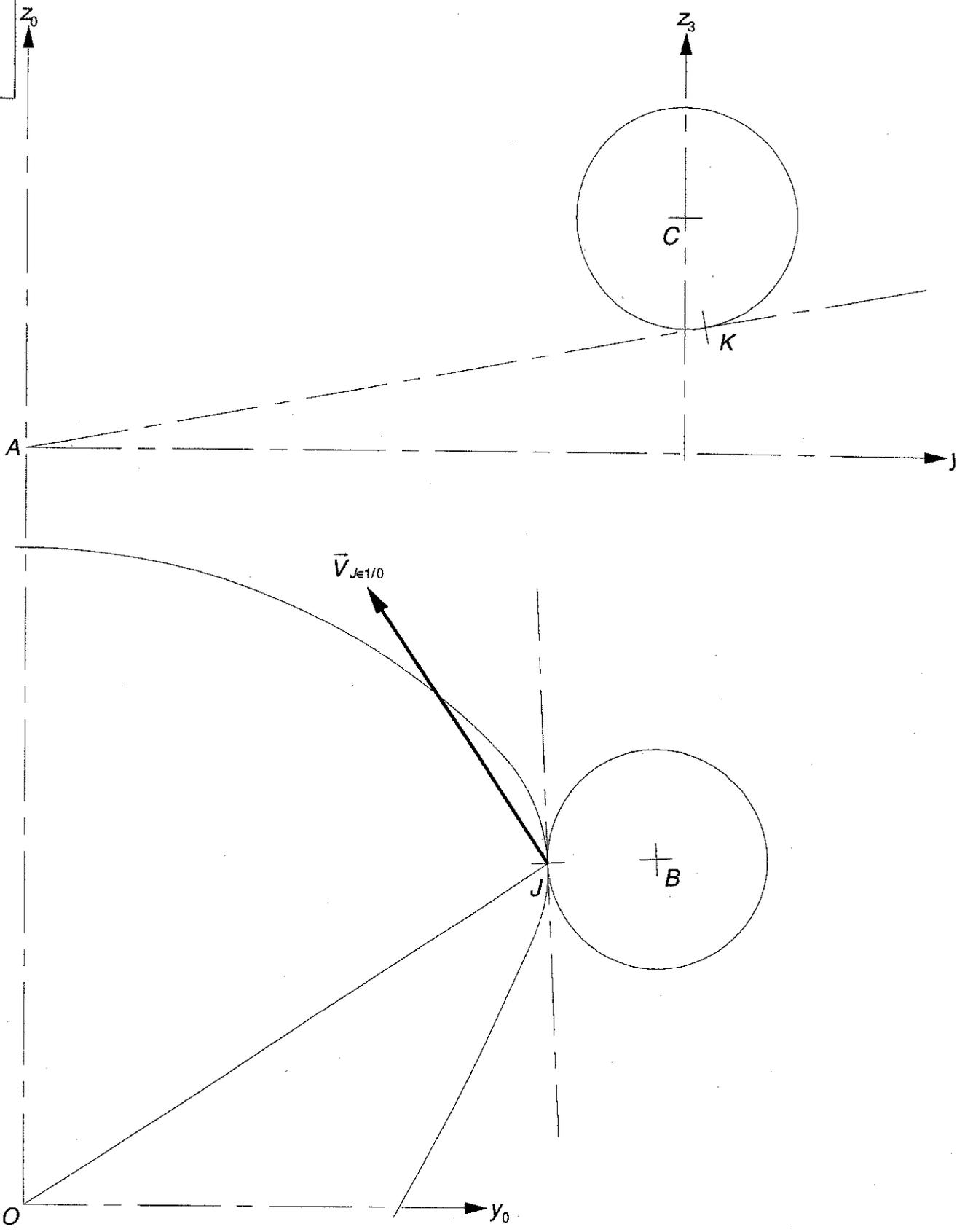
- D.3.1 Lors d'un basculement, en quelle liaison se transforme la liaison appui-plan ?
- D.3.2 Quel est son torseur d'actions mécaniques transmissibles en  $P$  ? en  $H$  ?
- D.3.3 Écrire le théorème du moment dynamique dans ce cas particulier (au début du basculement, le fuseau est en appui en  $P$  mais est encore vertical).
- D.3.4 Calculer  $\tan \psi$  qui précise la position du point  $P$  sur le cercle  $(H, r)$ .
- D.3.5 Au démarrage ( $\dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} \neq 0$ ), où se situe le point  $P$  ? Donner l'expression littérale de l'accélération maxi  $\ddot{\theta}_{\text{Maxi}}$  que peut supporter le porte-fuseau sans basculer.
- D.3.6 En régime établi ( $\dot{\theta} \neq 0, \ddot{\theta} = 0$ ), où se situe le point  $P$  ? Donner l'expression littérale de la vitesse maxi  $\dot{\theta}_{\text{Maxi}}$  que peut supporter le porte-fuseau sans basculer.
- D.3.7 L'arbre d'entrée  $\mathcal{I}$  (voir schéma de la motorisation page 5) tourne à 90 tours/min. Déterminer la position limite du point  $G$ .



**Figure 7 : Paramétrage de la came**



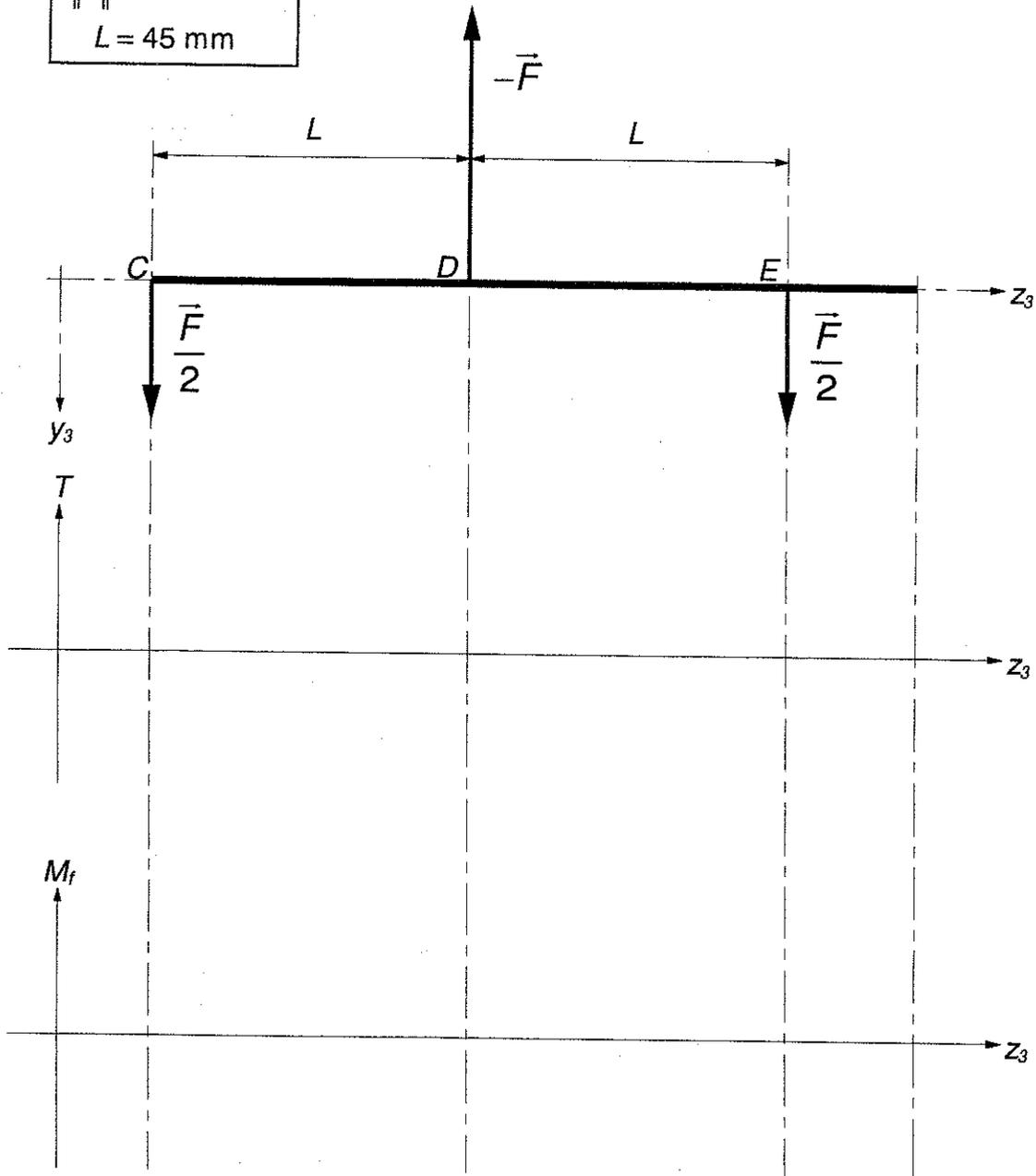
**Figure 8 : Paramétrage du barillet et du porte-fuseau.**



**Annexe 1 : Cinématique graphique**



$\|\vec{F}\| = F = 200 \text{ N}$   
 $L = 45 \text{ mm}$



Dimensionnement du coulisseau 3 :