SESSION 1998 **P006**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.
Les 2 parties sont totalement indépendantes.

PARTIE 1

Question 1.1: Soit f une fonction continue sur l'intervalle$[-1, 1]$. Calculez la dérivée $F'(x)$ de la fonction $F : x \in \mathbb{R} \longrightarrow F(x)$ définie par

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} f(t)dt.$$

Question 1.2: Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de période T.
Montrez que la fonction $F : x \in \mathbb{R} \longrightarrow F(x)$ définie par

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$$

est indépendante de x.

Soit m un paramètre réel tel que $0 \leq m \leq 1$. A chaque valeur de m on associe la fonction réelle u définie par

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - m\sin^2(t)}}.$$

Question 1.3: On commence par traiter deux cas particuliers.

a - Précisez le domaine de définition et calculez $u(x)$ pour $m = 0$.

b - Précisez le domaine de définition et calculez $u(x)$ pour $m = 1$.

Dans la suite on considère $0 < m < 1$.

Question 1.4:

a - Montrez que u est dérivable et donnez l'expression de $u'(x)$.

b - En déduire que u est croissante et impaire sur $\mathbb{R}$.

c - Montrez que

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty.$$

Question 1.5: Pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on définit

$$v(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}.$$

a - Etablir que $u(x) = v(x)$ dans cet intervalle.

b - La fonction $v(x)$ est-elle définie pour $x = \pi/2$? Admet-elle une limite en ce point ?

c - Montrez que $u(x+\pi) - u(x)$ est constante quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimez cette constante, qu'on notera $K(m)$, en fonction de $u(\pi/2)$.

Question 1.6:

a - Démontrez que u admet une fonction réciproque A définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donnez le sens de variation de A.

b - Calculez $A(x + K(m)) - A(x)$.

c - Exprimez A' et montrez que A'' vérifie

$$A'' + m\sin(A)\cos(A) = 0.$$

Question 1.7: Pour tout y réel, on note $x = A(y)$ et on définit les fonctions S, C et D par

$$S(y) = \sin(x), \quad C(y) = \cos(x) \ \text{ et } \ D(y) = \sqrt{1 - m\sin^2(x)}.$$

a - Etudiez la parité des 3 fonctions. Montrez qu'elle sont périodiques et donnez leur période en fonction de $K(m)$.

b - Exprimez les dérivées S', C' et D' en fonction de S, C et D.

Soit $w : (x,t) \longrightarrow w(x,t)$ une application de classe $\mathcal{C}^{(3)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées partielles vérifient la relation

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 6w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$$

On cherche les solutions de l'équation aux dérivées partielles considérée pour lesquelles il existe $g \in \mathcal{C}^{(3)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $w(x,t) = g(x-ct)$ où c est un nombre réel strictement positif donné. On posera par la suite $\xi = x - ct$.

Question 1.8:

a - Exprimez $\partial w/\partial t$, $\partial w/\partial x$ et $\partial^3 w/\partial x^3$ en fonction des dérivées de g.

b - En déduire une équation différentielle satisfaite par g.

c - Montrez, en intégrant deux fois de suite l'équation différentielle précédente, qu'on peut exprimer g'^2 en fonction de g, c et de constantes d'intégration.

Question 1.9: On fixe les constantes d'intégration en considérant le cas particulier où $g, g', g'' \to 0$ pour $\xi \to \pm\infty$.

a - A quelle condition g' est-elle définie ?

b - En supposant cette condition satisfaite, déterminez g, en fonction de ξ, c et d'une constante arbitraire.

PARTIE 2

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(E) \qquad (x^2-1)u''(x) + 2x(1-n)u'(x) - 2nu(x) = 0$$

d'inconnue la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{(2)}$ et où n est un paramètre entier.

Question 2.1: Montrez que

$$u_n(x) = (x^2-1)^n$$

vérifie (E).

Question 2.2: On définit le polynôme

$$P_n(x) = k_n \frac{d^n u_n(x)}{dx^n}$$

où k_n est un nombre réel non nul.

a - Déterminez une équation différentielle linéaire du second ordre (E_n) satisfaite par $P_n(x)$.

b - Exprimez $P_n(-x)$ en fonction de $P_n(x)$.

c - Déterminez la constante k_n pour que P_n vérifie $P_n(1) = 1$ (*dans toute la suite, on fixe k_n à cette valeur*).

d - Montrez que toutes les racines de $P_n(x)$ sont situées dans l'intervalle $]-1, +1[$.

e - Retrouvez à l'aide de l'équation différentielle (E_n) que $P_n(x)$ n'a que des racines simples.

Question 2.3:

a - Démontrez que pour deux entiers $m \neq n$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

b - Calculez la valeur de

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx$$

en fonction de n.

Remarque : Les résultats suivants peuvent être utiles

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n} dx = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \text{ et } \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n+1} dx = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Question 2.4: Soit la fonction réelle f définie pour $x \in [0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hx + h^2}}$$

où h est un paramètre réel $\in]0, 1[$.

a - Justifiez et effectuez le développement de f sous forme de série de fonctions polynomiales en x et h *(On admettra la permutation des sommations dans toute la question).*

b - En déduire que f peut se décomposer sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(h)P_n(x)$$

où les coefficients $c_n(h)$ sont indépendants de x.

c - Etablissez, en dérivant f par rapport à h, une relation de récurrence entre les polynômes P_n.

d - De manière analogue et en admettant la dérivation terme à terme par rapport à x du développement de f, montrez que les P_n vérifient :

$$x\frac{d}{dx}P_n(x) - \frac{d}{dx}P_{n-1}(x) - nP_n(x) = 0.$$