SESSION 1999 P002

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Les parties I et II sont indépendantes.

R et **C** désignent respectivement l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres complexes.

Partie I

On désigne par ϕ l'application de classe C^1 de **R** dans $\mathbf{R}^2$ qui à t, fait correspondre (x(t),y(t)) vérifiant : pour tout t réel $\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) + b\,y(t) \\ y'(t) = c\,x(t) + d\,y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

a,b,c,d,x_0 et y_0 étant des réels donnés.

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $m_0 = (x_0, y_0)$.

On appelle $C(m_0)$ l'ensemble des $\phi(t)$ lorsque t décrit **R**.

Dans toutes les représentations graphiques, on indiquera , pour t croissant , le sens de parcours de $C(m_0)$.

1. Déterminer $C(m_0)$ lorsque $m_0 = (0,0)$

2. Dans cette question, on prend $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Déterminer ϕ et dans chacun des trois cas suivants, représenter $C(m_0)$

cas 1 : $\mu < \lambda < 0$ cas 2 : $\mu = \lambda < 0$ cas 3 : $\mu < 0 < \lambda$

Pour chaque cas, on représentera sur une même figure $C(m_0)$ pour :

* $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$ * $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$ * $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$

On étudiera $C(m_0)$ lorsque t tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

3. Déterminer ϕ pour $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda < 0$

Représenter sur une même figure $C(m_0)$ pour :

* $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$ * $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$

Tournez la page S.V.P.

4. Dans cette question, on prend $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \leq 0 < \beta$. On prend $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$

Représenter $C(m_0)$ en séparant les cas $\alpha = 0$ et $\alpha < 0$.
(on pourra étudier l'application de **R** dans **C** qui à t, fait correspondre $x(t) + i\,y(t)$ et chercher une représentation polaire de $C(m_0)$).

Partie II

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel **réel** de dimension finie n ($n \geq 2$) et L un endomorphisme de E. Dans les questions 2 et 6, on prend n = 2. Dans les autres questions et sauf indication contraire, n est quelconque ($n \geq 2$).

1. Soit A une matrice à n lignes et n colonnes à coefficients **réels**, V une matrice à n lignes et 1 colonne à coefficients **complexes** , λ un nombre complexe tels que $AV = \lambda V$.
On appelle α et β la partie réelle et la partie imaginaire de λ .

Si $V = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ on note $\overline{V} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

On pose $W_1 = V + \overline{V}$ et $W_2 = i(V - \overline{V})$ $(i^2 = -1)$
Calculer AW_1 et AW_2 en fonction de α, β, W_1 et W_2 .

2. Dans cette question, on suppose que n = 2 et que L n'a pas de valeur propre réelle, on note les racines complexes de son polynôme caractéristique $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec α et β réels.
Démontrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de L dans cette base soit $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

3. Démontrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par L.

4. On dit que L vérifie la propriété (p) lorsque tout sous-espace vectoriel de E stable par L admet un sous-espace vectoriel supplémentaire également stable par L
a) Donner, pour n = 2, un exemple d'endomorphisme ne vérifiant pas (p).
b) Démontrer que, si L est diagonalisable, il vérifie (p).
c) Donner, pour n = 2, un exemple d'endomorphisme non diagonalisable et vérifiant (p).

5. On dit que L vérifie la propriété (q) lorsque E est somme directe de sous-espaces stables par L de dimension 1 ou 2 .
a) Donner, pour n = 3, un exemple d'endomorphisme ne vérifiant pas (q).
b) Soit L vérifiant (p) .

On considère E' un sous-espace vectoriel de E stable par L, démontrer que la restriction L' de L à E' vérifie aussi la propriété (p).
En déduire, par récurrence sur la dimension n de E, que L vérifie la propriété (q).

6. Dans cette question, $n = 2$.

a) Soit (e_1, e_2) une base donnée de E. Démontrer qu'on peut définir sur E un produit scalaire pour lequel (e_1, e_2) est une base orthonormale.

b) On suppose L diagonalisable, on appelle λ et μ ses valeurs propres avec $\mu \leq \lambda$.
Démontrer qu'il existe un produit scalaire sur E noté $(\ |\ )$ tel que, pour tout v de E, on ait
$\mu\,(v \mid v) \leq (v \mid L(v)) \leq \lambda\,(v \mid v)$.

c) On suppose L non diagonalisable et ayant une valeur propre réelle λ, soit ε un réel strictement positif donné.
Démontrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de L dans cette base soit $\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
En déduire qu'il existe un produit scalaire sur E noté $(\ |\ )$ tel que, pour tout v de E, on ait
$(\lambda-\varepsilon)\,(v \mid v) \leq (v \mid L(v)) \leq (\lambda+\varepsilon)\,(v \mid v)$.

d) On suppose que L n'a pas de valeur propre réelle, on note les racines complexes de son polynôme caractéristique $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec α et β réels.
Démontrer qu'il existe un produit scalaire sur E noté $(\ |\ )$ tel que, pour tout v de E, on ait
$(v \mid L(v)) = \alpha\,(v \mid v)$.

7. On revient au cas n quelconque ($n \geq 2$) et on suppose que L vérifie (q).
On considère deux réels a et b tels que, pour toute racine réelle ou complexe λ du polynôme caractéristique de L, on ait $a < \mathrm{Re}(\lambda) < b$. ($\mathrm{Re}(\lambda)$ désignant la partie réelle de λ)
Démontrer qu'il existe un produit scalaire sur E noté $(\ |\ )$ tel que, pour tout v de E, on ait
$a\,(v \mid v) \leq (v \mid L(v)) \leq b\,(v \mid v)$.

Partie III

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$
On considère une application f de classe C^1 de E dans E et L un endomorphisme de E vérifiant les hypothèses (H) suivantes :

$$(H)\quad \begin{cases} (H1) & f(0) = 0 \\ (H2) & \text{L vérifie la propriété (q) définie au II.5} \\ (H3) & \text{Pour toute racine } \lambda \text{ du polynôme caractéristique de L, } \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \\ (H4) & \text{Il existe une norme N sur E telle que } \lim_{v \to 0} \dfrac{N(f(v) - L(v))}{N(v)} = 0 \end{cases}$$

v_0 étant un élément non nul de E, on considère une fonction ϕ de classe C^1 de $[0, +\infty[$ dans E telle que :

$$(S) \quad \begin{cases} \text{pour tout t positif ou nul}, \ \phi'(t) = f(\phi(t)) \\ \text{pour tout t positif ou nul}, \ \phi(t) \text{ est non nul} \\ \phi(0) = v_0 \end{cases}$$

1. Démontrer que (H4) est alors vérifiée pour une norme quelconque de E.

2. Quelle est la différentielle de f en 0 ?

3. a) Démontrer qu'il existe un produit scalaire sur E noté $(\ |\ )$ et deux réels strictement positifs c et α tels que, pour tout v de E vérifiant $\|v\|$ inférieur à α, on ait $(v \mid f(v)) \leq -c(v \mid v)$ ($\|v\| = \sqrt{(v|v)}$, cette notation sera utilisée dans la suite de cette question 3).

b) α désigne le réel obtenu à la question précédente. On suppose $\|v_0\| < \alpha$, démontrer que, pour tout t positif, $\|\phi(t)\| < \alpha$ et en déduire la limite en $+\infty$ de $\phi(t)$. (On pourra étudier la fonction ψ définie par $\psi(t) = \|\phi(t)\|^2$)

4. Dans cette question, n = 2 et f est l'application de E dans E définie par
$f(x,y) = (-x - y + x(x^2 + y^2),\ x - y + y(x^2 + y^2))$
On considère une fonction ϕ de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ solution de (S) ,on explicite ϕ sous la forme $\phi(t) = (x(t),y(t))$ et on pose enfin $v_0 = (x_0, y_0)$ avec $0 < x_0^2 + y_0^2 \leq 1$

a) Construire un endomorphisme L de E tel que f et L vérifient les hypothèses (H) .

b) On définit les fonctions ψ et ξ sur $[0, +\infty[$ par $\psi(t) = x^2(t) + y^2(t)$ et $\xi(t) = \left(\dfrac{\psi(t) - 1}{\psi(t)}\right)^2$

Démontrer que, pour tout t positif, $\psi'(t) = 2\psi(t)(\psi(t) - 1)$, en déduire $\xi(t)$ puis $\psi(t)$ en séparant les cas $x_0^2 + y_0^2 < 1$ et $x_0^2 + y_0^2 = 1$

c) Peut-on trouver une fonction ϕ de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ solution de (S) lorsque $x_0^2 + y_0^2 > 1$?

Fin de l'énoncé