



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

## MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices ne sont pas autorisées et les parties I et II sont indépendantes*

## Notations

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1. Pour  $p$  entier supérieur ou égal à 1,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  désigne le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes. On identifiera  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}^n$ , que l'on supposera muni de son produit scalaire canonique noté  $(\cdot | \cdot)$ .

Lorsque  $p = n$ ,  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  sont notés plus simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et sont munis de leur structure d'algèbre,  $I_n$  représentant la matrice identité.

Pour  $A$  appartenant à  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ ,  ${}^t A$  désigne la matrice transposée de  $A$  : c'est un élément de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ .  $0_{n,p}$  désigne la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ .

Si  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  représenté par la matrice  $A$  dans une base donnée, on note  $\text{Sp}(f)$  ou  $\text{Sp}(A)$  l'ensemble des valeurs propres de  $f$ ,  $\chi_f$  ou  $\chi_A$  son polynôme caractéristique et  $\text{Tr}(f)$  ou  $\text{Tr}(A)$  sa trace. En outre, si  $A$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$ , lorsque  $A$  est considérée comme un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

$\mathbb{R}[X]$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels,  $\mathbb{C}[X]$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et  $\mathbb{N}_n$  est l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

## Partie I

**I.1** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$  donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$$

a) Si  $A$  est non inversible, montrer sans recourir au déterminant, que  $M$  est non inversible.

b) Si  $A$  est inversible, on pose  $P = \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$ . Résoudre alors dans  $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$  l'équation matricielle  $XP = M$ .

c) Retrouver le résultat connu :  $\det M = \det A \cdot \det C$ .

Dans toute la suite  $u$  désigne un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ .

**I.2** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  stable par  $u$ . Si  $v$  désigne l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ , montrer que  $\chi_v$  divise  $\chi_u$ .

**Tournez la page S.V.P.**

**I.3** Pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}^n$ , on définit l'ensemble  $F_u(x)$  par :

$$F_u(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists P \in \mathbb{R}[X], y = P(u)(x)\}$$

Montrer que  $F_u(x)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  stable par  $u$ .

**I.4** Dans cette question, on suppose que  $x$  est un élément non nul de  $\mathbb{R}^n$ .

a) Montrer l'existence d'un plus petit entier naturel  $q$  pour lequel la famille de vecteurs  $(x, u(x), \dots, u^q(x))$  est liée.

b) Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_q)$  une famille de nombres réels non tous nuls telle que  $\sum_{j=0}^q a_j u^j(x) = 0$

et  $S$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $S(X) = \sum_{j=0}^q a_j X^j$ . Montrer que  $a_q$  est non nul, puis que  $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$  est une base de  $F_u(x)$ .

c) Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, q\}$ , on pose  $\alpha_i = \frac{a_i}{a_q}$  et on note  $u_0$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_u(x)$ . Montrer que  $\chi_{u_0}(X) = (-1)^q \sum_{i=0}^q \alpha_i X^i$ , donner la valeur de  $\chi_{u_0}(u)(x)$  et en déduire que le polynôme caractéristique de  $u$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

## Partie II

**II.1** Vérifier les propriétés suivantes :

a)  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (AX \mid Y) = (X \mid {}^tAY)$

b)  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \text{Tr}(X {}^tY) = (X \mid Y)$

c)  $\forall (X, Y, Z) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3, (X {}^tY)Z = (Y \mid Z)X$

**II.2** Soit  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \rightarrow \text{Tr}({}^tAB)$ . Montrer que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Dans toute la suite ce produit scalaire sera noté  $((\cdot \mid \cdot))$ .

**II.3** A partir de cette question,  $r, s, l, m$  désignent des entiers naturels inférieurs ou égaux à  $n$ .

a) Evaluer le produit par blocs  $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} (I_r \mid 0_{r,n-r})$ .

b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang  $r$ . Montrer qu'il existe  $B$  dans  $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$  et  $C$  dans  $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$  telles que  $A = BC$ .

c) Montrer qu'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices non nulles  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telles que  $A = X {}^tY$ .

d) Montrer que la décomposition  $A = X {}^tY$  de la question précédente n'est pas unique et déterminer les relations vérifiées par des matrices colonnes  $X, Y, Z, T$  telles que

$$A = X {}^tY = Z {}^tT$$

**II.4 a)** Soit  $(Z_i)_{1 \leq i \leq r}$  et  $(T_j)_{1 \leq j \leq s}$  deux familles libres de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que la famille de matrices  $(Z_i {}^tT_j)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$  est de rang égal à  $rs$ .

b) Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ . Que peut-on dire de la famille de matrices  $(X_i^t Y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  ?

c) Soit  $(V_i)_{1 \leq i \leq l}$  et  $(W_j)_{1 \leq j \leq m}$  deux familles de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  de rangs respectifs  $r$  et  $s$ . Déterminer le rang de la famille de matrices  $(V_i^t W_j)_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}}$ .

**II.5** Montrer que si les bases  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$  sont des bases orthonormales de  $\mathbb{R}^n$ , la famille  $(X_i^t Y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire défini en **II.2**.

La réciproque est-elle vraie ?

**II.6** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1.

a) Montrer que  $A^2 = (\text{Tr } A)A$ .

b) Soit  $X$  et  $Y$  deux éléments non nuls de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que  $A = X^t Y$ . Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :

i)  $(X|Y) = 0$ .

ii)  $\text{Tr } A = 0$ .

iii)  $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$ .

iv)  $A$  est non diagonalisable.

**II.7** Montrer que les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , diagonalisables et de rang 1 engendrent  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Partie III

Pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on note  $h_{A,B}$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), h_{A,B}(M) = AM - MB$$

et  $\bar{h}_{A,B}$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \bar{h}_{A,B}(M) = AM - MB$$

**III.1** Soit  $A_0$  et  $B_0$  les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B_0)$ .

b) On considère la base  $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et on note  $H_0$  la matrice dans cette base  $\mathcal{B}$  de l'endomorphisme  $h_{A_0, B_0}$ . Déterminer  $H_0$ , puis  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(H_0)$  et vérifier que :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(H_0) = \{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B_0)\}$$

c) Montrer que  $A_0$  et  $B_0$  sont diagonalisables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . En est-il de même de  $H_0$  ?

Soit maintenant  $A$  et  $B$  quelconques dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On se propose d'étudier les liens existant entre la diagonalisabilité de  $A$  et  $B$  et celle de  $h_{A,B}$ .

**III.2** Soit  $a \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $b \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ . Montrer qu'il existe  $(V, W) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$  tel que :

$$AV = aV, \quad {}^tWB = b{}^tW \quad \text{et} \quad V^tW \quad \text{est vecteur propre de} \quad \bar{h}_{A,B}$$

En déduire l'inclusion :  $\{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\} \subset \text{Sp}(\bar{h}_{A,B})$ .

**Tournez la page S.V.P.**

**III.3** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il en est de même de  $h_{A,B}$ . Calculer dans ce cas  $\text{Tr}(h_{A,B})$ .

**III.4** On note  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les valeurs propres non nécessairement distinctes de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ . En exprimant  $\chi_A$  en fonction des  $a_i$ , montrer que la matrice  $\chi_A(B)$  est inversible si et seulement si  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$ .

**III.5** Soit  $\lambda \in \text{Sp}(\overline{h_{A,B}})$  et  $M$  un vecteur propre associé.

a) Montrer que pour tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , on a la relation :

$$P(A)M = MP(B + \lambda I_n)$$

b) Montrer que  $\chi_A(B + \lambda I_n)$  est non inversible.

c) En déduire en utilisant **III.2** et **III.4** :  $\text{Sp}(\overline{h_{A,B}}) = \{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\}$ .

**III.6** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $M$  non nulle dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AM = MB$ .

Dans toute la suite du problème, on suppose  $B = A$  et on considère l'endomorphisme  $h_{A,A}$  que l'on notera plus simplement  $h_A$ .

**III.7** On suppose  $A$  diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on note  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  une base de vecteurs propres de  $A$ , chaque vecteur  $V_i$  étant associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ , on définit la matrice  $M_{ij}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, M_{ij}V_k = \delta_{jk}V_i \quad \text{où} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

a) Montrer que la famille de matrices  $(M_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

b) Montrer que pour tout  $(i, j, k) \in \mathbb{N}_n^3$  :

$$h_A(M_{ij})V_k = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k$$

et en déduire que les matrices  $M_{ij}$  sont des vecteurs propres de  $h_A$ .

c) On note  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  les valeurs propres distinctes de  $A$ ,  $m_1, m_2, \dots, m_p$  leurs ordres de multiplicité respectifs et  $J = \{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2 \mid \lambda_i = \lambda_j\}$ . Montrer que :

$$\text{Ker } h_A = \text{Vect}\{M_{ij} \mid (i, j) \in J\} \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker } h_A = \sum_{i=1}^p m_i^2$$

d) Montrer que  $\dim \text{Ker } h_A \geq n$  et que l'égalité a lieu si et seulement si  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.

e) On note  $\mathbb{R}[A] = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists P \in \mathbb{R}[X], Q = P(A)\}$ . Montrer que si les  $n$  valeurs propres de  $A$  sont distinctes,  $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$  constitue une base de  $\mathbb{R}[A]$  et en déduire que dans ce cas  $\text{Ker } h_A = \mathbb{R}[A]$ .

**III.8** On suppose  $h_A$  diagonalisable et on note  $(P_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  une base de vecteurs propres de  $h_A$ , chaque matrice  $P_{ij}$  étant associée à la valeur propre  $\lambda_{ij}$ . Montrer que si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , la famille  $(P_{ij}X)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^n$  et en déduire que  $A$  est diagonalisable.