SESSION 2000 PC007

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.
Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

I.1 On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ de la variable complexe z.

I.1.1 Déterminer son rayon de convergence.

I.1.2 Calculer sa somme $S(z)$. On distinguera les cas $z = 0$ et $z \neq 0$.

I.2 Soit la fonction f de la variable complexe z définie sur $\mathbb{C} - \{2ki\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}^*\}$ par :

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{pour } z \notin 2i\pi\mathbb{Z} \, ,$$

$$f(0) = 1 \, .$$

Nous admettrons qu'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme sur son disque ouvert de convergence est égale à $f(z)$.

I.2.1 Montrer que $R \leq 2\pi$. Nous admettrons que $R = 2\pi$.

I.2.2 Calculer B_0.

I.2.3 Donner pour tout $n \geq 1$ l'expression de B_n en fonction de $B_0, \ldots, B_{n-1}$ (on pourra remarquer que pour $|z| < 2\pi$, on a l'égalité $S(z)f(z) = 1$). En déduire que B_n est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2.4 Calculer B_1, B_2, B_3, B_4.

I.2.5 Calculer $f(z) - f(-z)$. En déduire que $B_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Tournez la page SVP

I.3

I.3.1 Exprimer $1+\dfrac{f(4z)-f(2z)}{z}$ en fonction de e^{2z}.

I.3.2 En déduire l'expression en fonction des B_n des développements en série entière des fonctions $\mathrm{th}x$ et $\tan x$ de la variable réelle x. Quel est le rayon de convergence des séries entières obtenues ?

I.4 On considère la fonction h des deux variables complexes x et z définie par :

$$h(x, z) = f(z)\, e^{xz}.$$

I.4.1 Montrer qu'il existe une suite $(\beta_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels telle que, pour tout couple (x, z) de nombres complexes tel que $|z| < 2\pi$, on ait :

$$(1) \qquad h(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Déterminer le degré de $\beta_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exprimer $\beta_n(0)$ en fonction de B_n.

I.4.2 Calculer $\beta_{k+1}(x+1) - \beta_{k+1}(x)$ pour $k \geq 0$. En déduire une expression de la somme $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + N^k$ en fonction de $\beta_{k+1}(N+1)$, $\beta_{k+1}(0)$ et k.

I.4.3 Comparer $h(1-x,-z)$ à $h(x, z)$. En déduire que l'on a $\beta_n(1-x) = (-1)^n\beta_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\beta_n(1)$ en fonction de B_n.

I.4.4 On suppose dorénavant que x est réel. On admettra que l'on peut alors dériver terme à terme le deuxième membre de l'égalité (1) par rapport à x.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\beta'_{n+1}(x) = (n+1)\beta_n(x)$.

En déduire que $\int_0^1 \beta_n(x)dx = 0$ pour tout $n \geq 1$.

PARTIE II

Les résultats de la question I.4 permettent de définir la suite de polynômes $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ introduite à la question I.4.1 par la récurrence suivante :

$$\text{(i)} \qquad \beta_0(x) = 1,$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \beta'_{k+1}(x) = (k+1)\beta_k(x) \ \text{ et } \int_0^1 \beta_{k+1}(x)dx = 0.$$

Pour tout nombre entier $k \geq 0$, on note $\phi_k(x)$ la fonction 2π-périodique de la variable réelle x qui coïncide avec $\beta_k\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

II.1 Calculer $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ et $\beta_3(x)$. On vérifiera en particulier que $\beta_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

II.2

II.2.1 Vérifier que ϕ_2 est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

II.2.2 Développer ϕ_2 en série de Fourier réelle.

II.3

II.3.1 Montrer que pour tout $k \geq 3$ la fonction ϕ_k est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\phi_k' = \frac{k}{2\pi}\phi_{k-1} \quad ,$$

$$\phi_k^{(k-2)} = \frac{k!}{2^{k-1}\pi^{k-2}}\phi_2 \quad .$$

II.3.2 En déduire le développement en série de Fourier réelle de ϕ_{2p} pour p entier supérieur ou égal à 1 .

II.3.3 Exprimer, pour p entier supérieur ou égal à 1, la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de $\beta_{2p}(0)$ et p .

<u>PARTIE III</u>

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt$, où x est un nombre réel.

III.1 Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 1$.

III.2 Montrer que la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

III.3 On suppose x fixé, strictement supérieur à 1 .

III.3.1 Vérifier que pour tout $t > 0$ on peut écrire $\dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$.

III.3.2 Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et, pour tout $n \geq 2$, $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt$.

III.3.3 Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\Gamma_n(x)$ en fonction de n , x et $\Gamma(x)$.

III.3.4 En déduire que pour tout $x > 1$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x} = \dfrac{F(x)}{\Gamma(x)}$.

III.4 Soit k un nombre entier supérieur ou égal à 2 .

III.4.1 Exprimer $\Gamma(k)$ en fonction de k et $\Gamma(k-1)$.

III.4.2 En déduire la valeur de $\Gamma(k)$ et l'expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k}$ en fonction de k et $F(k)$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis.