SESSION 2002

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites
****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les ruisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.
$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures à éléments dans $\mathbb{K}$.
Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\operatorname{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in \operatorname{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})})^2, \varphi(AB)\leq\varphi(A) \cdot \varphi(B).$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, on rappelle qu'une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si la convergence a lieu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme quelconque.

Partie I

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ tels que $T = P^{-1}AP$.

I.1 Pour n fixé, on suppose que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et on considère une matrice M de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que M admet au moins une valeur propre.

b) Soit λ une valeur propre de M. Montrer qu'il existe $Q \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}.$$

c) En déduire qu'il existe $H \in GL_n(\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & HSH^{-1} \end{pmatrix}.$$

d) On pose $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H \end{pmatrix}$. Montrer que R est inversible et exprimer R^{-1}.

e) Calculer $R^{-1}Q^{-1}MQR$ et en déduire que M est trigonalisable.

I.2 Déduire de la question précédente que pour tout n entier supérieur ou égal à 1, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

I.3 Soit la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) La matrice G est-elle diagonalisable ?

b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Montrer que G admet un unique vecteur propre u dont la première composante dans la base $\mathcal{B}$ est égale à 1 et vérifier que $\mathcal{B}_1 = (u, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$. Calculer $Q^{-1}GQ$ et en déduire, en s'inspirant de la méthode décrite aux questions **I.1** et **I.2**, $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_3(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}GP = T$.

I.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si T est une matrice triangulaire supérieure semblable à A, que représentent les éléments diagonaux de T ?

I.5 Soit $S = (s_{i,j})$ et $T = (t_{i,j})$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que ST est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont $s_{1,1}t_{1,1}$, $s_{2,2}t_{2,2}$, $\ldots$, $s_{n,n}t_{n,n}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quels sont les éléments diagonaux de T^k ?

I.6 Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho\left(A^k\right) = [\rho(A)]^k$.

I.7 Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.8 En admettant l'existence de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la suite du problème montrera effectivement cette existence), montrer que pour toute norme N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante C réelle positive telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, N(AB) \le CN(A)N(B).$$

I.9 Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite $\left(P^{-1}AP\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

I.10 **a)** Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(|\lambda| < 1)$ ou $(\lambda = 1$ et $\mu = 0)$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$M_A = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

II.1 **a)** Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$: $N_\infty(AX)\leq M_A N_\infty(X)$.

b) Montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX)\leq C_A N(X).$$

c) Montrer que l'ensemble $\left\{ \dfrac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite :

$$\tilde{N}(A) = \sup_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

d) Montrer que : $\widetilde{N_\infty}(A)\leq M_A$.

e) On reprend dans cette question la matrice G introduite en **I.3**. Déterminer un vecteur X_0 de $\mathbb{C}^3$ tel que $N_\infty(X_0) = 1$ et $N_\infty(GX_0) = 10$. En déduire la valeur de $\widetilde{N_\infty}(G)$.

II.2 Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j}\neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0$$

montrer que $M_A\leq\widetilde{N_\infty}(A)$ et en déduire $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A$.

II.3 Montrer :

a) $\tilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.

b) $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A)\leq |\lambda|\, \tilde{N}(A)$.

c) En déduire : $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) = |\lambda|\, \tilde{N}(A)$.

d) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \tilde{N}(A + B)\leq\tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.

e) $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX)\leq\tilde{N}(A)N(X)$.

f) Déduire de ces résultats que $\tilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme N.

II.4 **a)** En considérant une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :

$$\rho(A) \leq \tilde{N}(A).$$

b) Donner un exemple simple de matrice A non nulle vérifiant $\rho(A) = \widetilde{N_\infty}(A)$.

c) Montrer que si A est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte :

$$\rho(A) < \tilde{N}(A).$$

II.5 Montrer que si $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_n$.

II.6 **a)** Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leq \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha|\, \rho(A)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ε tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \tilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k\right).$$

d) En déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie III

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geq B$ (resp. $A \leq B$, $A > B$, $A < B$) si et seulement si $A - B \geq 0$ (resp. $B - A \geq 0$, $A - B > 0$, $B - A > 0$).

Notons que grâce à l'identification de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra parler de vecteur de $\mathbb{R}^n$ positif ou strictement positif.

III.1 Donner un exemple de matrice A montrant que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

III.2 A, B, A', B' désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, alors $0 \leq AA' \leq BB'$.

b) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A^k \leq B^k$.

c) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\widetilde{N_\infty}(A) \leq \widetilde{N_\infty}(B)$.

d) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.

e) Montrer que si $0 \leq A < B$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $A \leq cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.

III.3 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des termes de chaque ligne soit constante égale à α. Montrer que α est valeur propre de A et que :

$$\rho(A) = \alpha = \widetilde{N_\infty}(A).$$

III.4 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note α_i la somme des termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $\alpha = \min\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_i$. On définit la matrice $B = (b_{i,j})$ par $B = 0_n$ si $\alpha = 0$ et $b_{i,j} = \dfrac{\alpha}{\alpha_i} a_{i,j}$ si $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la matrice B ainsi construite que :

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

III.5 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)$ un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$.
On note D_x la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour termes diagonaux x_1, x_2, ..., x_n. Calculer les éléments de la matrice $D_x^{-1} A D_x$ et en déduire :

$$\min_{1\leq i\leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

III.6 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et :

$$\rho(A) = \sup_{X>0}\left(\min_{1\leq i\leq n} \frac{(AX)_i}{x_i}\right) = \inf_{X>0}\left(\max_{1\leq i\leq n} \frac{(AX)_i}{x_i}\right).$$

Fin de l'énoncé