

*Les calculatrices sont interdites*

\*\*\*\*

*N.B.: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté,  
à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,  
il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition  
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*

## **PARTIE I**

On considère l'équation différentielle linéaire du 2<sup>o</sup> ordre en la fonction inconnue  $y$  de la variable réelle  $x$  :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où  $\lambda$  désigne un paramètre réel.

**I.1.** Etant donné  $\lambda \in \mathbb{R}$ , comparer les équations  $(\mathcal{E}_\lambda)$  et  $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$ .  
On supposera dans la suite du problème que  $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ .

Dans la suite de cette partie,  $y$  désigne une fonction de la variable réelle  $x$ , admettant un développement en série entière  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  au voisinage de 0.

**I.2.** Montrer que, pour que  $y$  soit solution de l'équation  $(\mathcal{E}_\lambda)$ , il faut et il suffit que l'on ait pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda + n + 1)(\lambda - n)}{(n + 1)^2} a_n.$$

**Tournez la page SVP**

**I.3.**

**I.3.1.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$  pour que l'équation  $(\mathcal{E}_\lambda)$  admette des solutions polynomiales de degré donné  $d \in \mathbb{N}$  ?

**I.3.2.** Lorsque c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de  $(\mathcal{E}_\lambda)$  de degré  $d$ , que nous noterons  $\varphi_d$ , telle que  $\varphi_d(0) = 1$ .

**I.3.3.** Expliciter la fonction polynôme  $\varphi_1$ .

**I.3.4.** Déterminer les coefficients  $a, b, c, a', b', c'$  tels que :

$$\frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}, \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{(2x+1)^2}.$$

En déduire la solution générale de l'équation  $(\mathcal{E}_1)$  sur  $]0, +\infty[$ .

**I.4.** On se place dans le cas où  $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda \notin \mathbb{N}$ .

**I.4.1.** On suppose que  $y$  est une solution non identiquement nulle de  $(\mathcal{E}_\lambda)$ .

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

**I.4.2.** Montrer qu'il existe une unique solution de  $(\mathcal{E}_\lambda)$ , que nous noterons  $\varphi_\lambda$ , développable en série entière de la variable  $x$  sur  $] -1, +1[$  et telle que  $\varphi_\lambda(0) = 1$ .

**I.4.3.** Expliciter les développements en série entière de la variable  $x$  des fonctions  $\varphi_{-\frac{1}{2}}$  et  $\varphi_{\frac{1}{2}}$ .

**PARTIE II**

Soit  $\psi$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x \sin^2 t} dt.$$

**II.1.** Montrer que  $\psi$  est définie et continue sur  $[-1, +\infty[$ .

**II.2.** Montrer que  $\psi$  est indéfiniment dérivable sur  $] -1, +\infty[$ .

**II.3.**

**II.3.1.** Montrer que pour tout  $u \in ]-1, +1[$  on a  $\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n$ .

**II.3.2.** Montrer que  $\psi$  est développable en série entière de la variable  $x$  sur  $] -1, +1[$  et que l'on a :

$$\forall x \in ] -1, +1[, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \right) x^n.$$

**II.3.3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt$ . Montrer que pour tout  $n \geq 1$  on a  $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$ .  
Calculer  $I_0$ .

En déduire  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ainsi que le développement de  $\psi$  en série entière de la variable  $x$  sur  $] -1, +1[$ .

**II.3.4.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq 1$ .

**II.3.5.** Montrer que le développement de  $\psi$  en série entière est intégrable terme à terme sur  $] -1, +1[$ , et en déduire que :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(x) \, dx = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left( \frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2.$$

**II.4.** Déduire du développement de  $\psi$  en série entière une expression de  $\psi(x)$  en fonction de  $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$  et  $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x)$  pour tout  $x \in ] -1, +1[$ .

**II.5.** Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'ellipse  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $t \in [0, 2\pi] \mapsto b \cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels donnés tels que  $a \geq b > 0$ . On note  $\ell$  sa longueur et  $e$  son excentricité.

Montrer que  $\ell = \pi a \left[ \varphi_{\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) \right]$ .

**PARTIE III**

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $t$  définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1+x \sin^2 t} \, dx.$$

**III.1.** Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , et  $2\pi$ -périodique.

**III.2.** Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**III.3.** Montrer que la série de Fourier de  $f$  est de la forme :

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{2n} \cos 2nt,$$

où  $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}, \dots$  sont des nombres réels que l'on ne cherchera pas à calculer. Préciser pourquoi la fonction  $f$  est égale à la somme de sa série de Fourier.

**III.4.** A l'aide du résultat de la question II.3.5, donner une expression de  $\alpha_0$  sous forme de somme d'une série numérique.

**Fin de l'énoncé**