CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des nombres entiers strictement négatifs.
On considère la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -n, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

I.1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathcal{D}$.

On notera désormais $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste correspondant. On a donc $R_n = U - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.2.

I.2.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n^{(p)}$ la dérivée de u_n à l'ordre p.
Calculer $u_n^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -n$.

I.2.2. Soient a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b$.
Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

I.2.3. Déduire de ce qui précède que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

I.3.

I.3.1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ à l'aide de $U_N(x)$ et $U(x+N)$.

I.3.2. En déduire que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-N-1, -N[$, puis sur $\mathcal{D}$.

I.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, établir une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

I.4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Donner un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

I.5.

I.5.1. Montrer que U est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

I.5.2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\displaystyle\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.
En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $U(x) = \dfrac{1}{4}\left[U\left(\dfrac{x}{2}\right) + U\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\right]$.

PARTIE II

II.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note f_p la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad f_p(t) = \frac{t^{p+1}}{e^t - 1}.$$

II.1.1. Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} f_p(t)$ selon les valeurs de p.
On notera désormais f_p la fonction f_p prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

II.1.2. Déterminer un équivalent de $f_p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

II.2. Soit φ la fonction d'une variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f_0(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

II.2.1. Montrer que le domaine de définition de φ est $]-1, +\infty[$.

II.2.2. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a \in]-1, +\infty[$ donnés.
Vérifier que pour tout $x \geq a$ et tout $t \geq 0$ on a $0 \leq f_p(t)e^{-xt} \leq f_p(t)e^{-at}$.
Montrer que la fonction $t \mapsto f_p(t)e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

II.2.3. Déduire de ce qui précède que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

II.2.4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

II.3.

II.3.1. Montrer que $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ pour tout $x > -1$.

II.3.2. En déduire que $\varphi(x) = U(x)$ pour tout $x > -1$.

II.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.
Pour tout $x > -1$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}e^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

PARTIE III

Soit g la fonction d'une variable réelle x, périodique de période 2π, telle que :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[, \qquad g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

Soit $\displaystyle\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g)\cos nx + b_n(g)\sin nx)$ la somme de la série de Fourier de g.

III.1. Préciser pourquoi g est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.2.

III.2.1. Calculer $b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.2. Calculer $a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.3.

III.3.1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

III.3.2. En déduire la valeur de $U\left(-\frac{1}{2}\right)$, puis celle de $U(0)$.

III.4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

III.5. On note G la primitive de g telle que $G(0) = 0$.

III.5.1. Montrer que G est impaire, périodique de période 2π.

III.5.2. Calculer les coefficients de Fourier de G.
Préciser pourquoi G est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.5.3. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Fin de l'énoncé