CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES 1997

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n$^\circ$ 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et Objectifs

On désigne par $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des fonctions f continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}\,t$ existe, $|f(t)|$ désignant le module de $f(t)$).

On considère l'application linéaire $\mathscr{F}$ de $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par :

$$f \stackrel{\mathscr{F}}{\longmapsto} \hat{f} \text{ où } \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\ \mathrm{d}\,t \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de la fonction f.

Après avoir étudié sur des exemples quelques propriétés de la transformée de Fourier dans la première partie, on détermine dans la deuxième partie la transformée de Fourier d'une fonction $\mathscr{H}_0$. Dans une troisième partie, indépendante des deux précédentes, on introduit une suite de fonctions $\mathscr{H}_n$ dont on détermine la transformée de Fourier dans une quatrième partie.

PREMIERE PARTIE

Dans cette partie f désigne une fonction appartenant à $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1.1/ Justifier l'existence et étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\hat{f}$.

1.2/ On suppose que la fonction f est à valeurs réelles.

1.2.1/ Montrer que si f est une fonction paire alors $\hat{f}$ est une fonction paire et à valeurs réelles.

1.2.2/ Que peut-on dire de $\hat{f}$ si la fonction f est impaire ?

1.3/ On suppose que la fonction $\hat{f}$ est impaire ; montrer qu'il existe un nombre complexe μ, que l'on explicitera, tel que :

$$\hat{f}(x) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(xt)\ \mathrm{d}\,t \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1.4/ **Premier exemple :**

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :

$p(t) = 1 - t$ lorsque $t \in [0,1]$

$p(t) = 0$ lorsque $t \in]1,+\infty[$

$p(-t) = p(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.4.1/ Montrer que p appartient à $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1.4.2/ Expliciter $\hat{p}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1.4.3/ La fonction $\hat{p}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ (resp $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$? Les réponses seront justifiées soigneusement.

1.4.4/ La fonction $\hat{p}$ appartient-elle à $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$?

1.5/ **Deuxième exemple :**

Pour tout entier naturel n on considère la fonction E_n définie sur $\mathbb{R}$ par $E_n(t) = |t|^n e^{-|t|}$ où $|t|$ désigne la valeur absolue de t.

On se propose de déterminer la transformée de Fourier $\hat{E}_n$ de cette fonction.

On considère la fonction K_n de la variable réelle x définie par :

$$K_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{(-1+ix)t} \, \mathrm{d}\, t.$$

Pour simplifier l'écriture, on désigne par α le nombre complexe $1 - ix$ et on écrira

$$K_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} \, \mathrm{d}\, t.$$

1.5.1/ Montrer que $E_n \in \mathscr{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et exprimer $\hat{E}_n(x)$ à l'aide de la partie réelle de K_n.

1.5.2/ Exprimer K_n en fonction de n et α (on commencera par établir une relation de récurrence entre K_n et K_{n-1} pour $n \geqslant 1$).

1.5.3/ Expliciter $\hat{E}_0(x)$, $\hat{E}_1(x)$, $\hat{E}_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.5.4/ Montrer qu'il existe une fonction β définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles, que l'on explicitera, telle que : $\hat{E}_n(x) = \dfrac{2(n!) \cos\left[(n+1) \operatorname{Arctan} x\right]}{(1+x^2)^{\beta(n)}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.5.5/ La fonction $\hat{E}_n$ appartient-elle à $\mathscr{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

1.6/ Soient c et d deux nombres réels tels que $c < d$ et f une fonction appartenant $\mathscr{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$; on suppose que la fonction $\hat{f}$ est impaire.

Montrer que la fonction $(a, b) \mapsto \displaystyle\int_a^b \frac{\hat{f}(x)}{x} \, \mathrm{d}\, x$ est bornée lorsque (a, b) décrit $]0, +\infty[\, \times\,]0, +\infty[$.

(On rappelle et on admettra que l'ensemble $\left\{ \left| \displaystyle\int_a^b \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}\, u \right|, (a,b) \in\,]0, +\infty[\, \times\,]0, +\infty[\right\}$ est borné et on désignera par M sa borne supérieure).

1.7/ La fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x \ln(2 + x^2)}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

1.8/ Existe-t-il deux nombres réels c et d, avec $c < d$, et une fonction f de classe $\mathscr{C}^0$ telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$ et telle que $\hat{f}(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\ln(2 + x^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

DEUXIEME PARTIE
Transformée de Fourier de $\mathscr{H}_0$

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{H}_0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathscr{H}_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ et on se propose de déterminer la transformée de Fourier $\hat{\mathscr{H}_0}$ de $\mathscr{H}_0$ en utilisant deux méthodes différentes.

2.1/ On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}\, u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; en déduire que $\mathscr{H}_0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}_0(t) \, \mathrm{d}\, t$.

Première méthode de calcul de $\hat{\mathscr{H}_0}$:

2.2/ On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions g_n par :

$$g_n(t) = t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2.2.1/ Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la fonction g_n appartient à $\mathscr{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.2.2/ On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t) \, \mathrm{d}\, t$, pour $n \in \mathbb{N}$.

2.2.2.1/ Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

2.2.2.2/ En déduire une expression simple de $\dfrac{I_n}{(2n)!}$.

2.2.3/ On considère la série entière $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$; en préciser le rayon de convergence et la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$.

2.3/ Vérifier que pour tout x réel, la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt)$, est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2.4/ Justifier avec soin l'égalité :

$$\hat{\mathscr{H}_0}(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}\, t \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2.5/ Déduire de ce qui précède une expression simple de $\hat{\mathscr{H}_0}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Deuxième méthode de calcul de $\hat{\mathscr{H}_0}$:

Pour simplifier l'écriture, on convient de noter φ la fonction $\hat{\mathscr{H}_0}(x)$; on a donc

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} \, \mathrm{d}\, t \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2.6/ Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(x)$ peut s'obtenir par dérivation sous le signe d'intégration.

2.7/ En déduire que φ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre $(\mathscr{E})$.

2.8/ Intégrer l'équation $(\mathscr{E})$, expliciter $\varphi(x) = \hat{\mathscr{H}_0}(x)$ et retrouver ainsi le résultat obtenu à la question 2.5/.

2.9/ Déduire de la question 2.5/ (ou 2.8/) qu'il existe un nombre réel λ_0 que l'on explicitera tel que : $\hat{\mathscr{H}_0} = \lambda_0 \mathscr{H}_0$.

TROISIEME PARTIE

La suite $(\mathscr{H}_n)$

On définit sur $\mathbb{R}$ deux suites de fonctions (H_n) et $(\mathscr{H}_n)$ respectivement par :

$$H_0(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, t^n} (e^{-t^2}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\mathscr{H}_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

3.1/ Expliciter $\mathscr{H}_1(t)$ et $\mathscr{H}_2(t)$.

On suppose dans ce qui suit que $n \geqslant 1$.

3.2/ Pour simplifier, on note G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = e^{-t^2}$ et $G^{(n)}$ sa dérivée $n^{\text{ième}}$.

En remarquant que $G'(t) = -2tG(t)$ et en dérivant n fois cette égalité, établir une relation entre $H_{n+1}(t)$, $H_n(t)$, $H_{n-1}(t)$, t et n ; en déduire l'expression de $\mathscr{H}_{n+1}(t)$ en fonction de $\mathscr{H}_n(t)$, $\mathscr{H}_{n-1}(t)$, t et n.

3.3/

3.3.1/ En dérivant la relation $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} G^{(n)}(t)$ obtenir l'expression de $H_n'(t)$ en fonction de $H_n(t)$, $H_{n+1}(t)$ et t.

3.3.2/ Déduire de ce qui précède l'expression de $H_n'(t)$ en fonction de $H_{n-1}(t)$ et n.

3.3.3/ Exprimer $\mathscr{H}_n'(t)$ en fonction de $\mathscr{H}_n(t)$, $\mathscr{H}_{n-1}(t)$, t et n.

QUATRIEME PARTIE

Transformée de Fourier de $\mathscr{H}_n$

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{H}_n$ les fonctions définies dans la troisième partie.

4.1/ Montrer que $\mathscr{H}_n \in \mathscr{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2/ **Détermination de $\hat{\mathscr{H}_1}$.**

4.2.1/ Exprimer $\hat{\mathscr{H}_1}(x)$ en fonction de $\hat{\mathscr{H}_0}(x)$ et de x.

4.2.2/ Déterminer le nombre complexe λ_1 tel que :

$$\hat{\mathscr{H}_1} = \lambda_1 \mathscr{H}_1.$$

4.3/ On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la fonction $\mathscr{H}_n$ est une fonction propre de l'application linéaire $\mathscr{F}$ définie dans l'introduction.

4.3.1/ Exprimer $\hat{\mathscr{H}}_{n+1}$ en fonction de $(\hat{\mathscr{H}_n})'$, $\hat{\mathscr{H}}_{n-1}$ et n (on suppose $n \geqslant 1$).

4.3.2/ Établir par récurrence que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}_n) = \hat{\mathscr{H}_n} = \lambda_n \mathscr{H}_n$$

où λ_n désigne un nombre complexe que l'on explicitera.