ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Notations utilisées :

- Pour tout ensemble fini E, on note $Card(E)$ le nombre d'éléments de E.

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}$ le corps des réels. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- On note $[n]$ l'ensemble $\{1,...,n\}$.

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(e_1,...,e_n)$.

- $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est orthonormée.

- A étant une matrice d'ordre n, la notation $A = (a_{ij})$ signifie que, pour tout couple (i,j) d'indices compris entre 1 et n, le coefficient de A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est a_{ij}.

- M_n désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

- La matrice identité de M_n est notée I_n.

- L'ensemble des matrices orthogonales de M_n est noté O_n.

- L'ensemble des matrices symétriques de M_n est noté S_n

- Pour toute matrice A, on note ${}^t\!A$ la matrice transposée de A.

- Pour toute matrice A appartenant à M_n, on note $tr(A)$ la trace de A, et $det(A)$ son déterminant.

- Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n, on note $N(A)$ le nombre défini par :

$$N(A) = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[n]^2} a_{ij}^2},$$

et $H(A)$ le nombre défini par

$$H(A) = \sum_{\substack{(i,j)\in[n]^2 \\ i\neq j}} a_{ij}^2.$$

- Pour tout réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$, on pose $X_\theta = \tan 2\theta$.

Présentation :

Les résultats demandés seront clairement mis en évidence.

La correction tiendra compte de la présentation générale.

PREMIERE PARTIE

Dans cette partie, $n = 2$.

1. Soit $M \in S_2$.

- Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω de déterminant égal à 1 et telle que ${}^t\Omega M \Omega$ soit une matrice diagonale.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout réel θ, on pose : $\Omega_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $B_\theta = {}^t\Omega_\theta A \Omega_\theta$.

2.a. Calculer B_θ.

2.b. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$; exprimer $\cos 2\theta$ en fonction de $X_\theta = \tan 2\theta$.

2.c. Montrer l'existence et l'unicité de $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ tel que B_{θ_0} soit diagonale, et donner la valeur de θ_0. A cet effet, on commencera par déterminer le nombre $X_{\theta_0} = \tan 2\theta_0$.

3. Dans cette question, on prend $\theta = \theta_0$, et on note simplement X le nombre X_{θ_0}, et B la matrice B_{θ_0}.

3.a. Déduire des résultats de la question 2 une expression de B qui ne fasse pas intervenir de fonctions trigonométriques.

3.b. En déduire les valeurs propres de A.

3.c. Calculer $tr(B) - tr(A)$ et $N(B) - N(A)$.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

1. Soient $R = (r_{ij})$, $S = (s_{ij})$ et $T = (t_{ij})$ trois matrices carrées d'ordre n.

On pose $B = (b_{ij}) = RST$.

Soit $(i,j) \in [n]^2$.

- Exprimer b_{ij} en fonction des coefficients des matrices R, S et T.

2.

2.a Montrer que l'application qui, à toute matrice $A \in M_n$, associe le nombre $N(A)$, définit une norme sur l'espace vectoriel M_n.

2.b. Prouver que $\forall A \in M_n$, $N(A) = \sqrt{tr({}^tA.A)}$.

2.c. En déduire que $\forall A \in M_n, \forall P \in O_n$, $N(A) = N({}^tPAP)$.

3. Le but de cette question est de définir, pour tout couple (p,q) d'entiers tel que $1 \leq p < q \leq n$, une application de S_n dans S_n notée $\varphi_{p,q}$, et une application de S_n dans $\mathbb{R}$ notée $\theta_{p,q}$, ces deux applications étant destinées à jouer un rôle essentiel. Soient donc p et q deux tels entiers.

Pour définir $\theta_{p,q}$ et $\varphi_{p,q}$, il suffit de donner l'image, par chacune de ces applications, de toute matrice de S_n.
Soit donc $A = (a_{ij}) \in S_n$ une telle matrice.

Pour tout réel θ, on note Ω_θ, ou plus simplement Ω lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la matrice réelle d'ordre n définie par les relations suivantes :

- si $i \notin \{p,q\}$, $\omega_{ii} = 1$,
- $\omega_{pp} = \omega_{qq} = \cos\theta$,
- $\omega_{pq} = -\sin\theta$,
- $\omega_{qp} = \sin\theta$,
- si $i \neq j$ et $(i,j) \notin \{p,q\}^2$, $\omega_{ij} = 0$,

où l'on a posé $\Omega = (\omega_{ij})$.

On note g_θ, ou plus simplement g lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est Ω.

On note B_θ, ou plus simplement B lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la matrice réelle d'ordre n définie par la relation $B = {}^t\Omega A \Omega$. On pose $B = (b_{ij})$.

On note enfin G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_p et e_q.

3.a. Expliciter la matrice Ω en l'écrivant sous la forme habituelle d'un tableau carré ; on fera clairement apparaître la position des zéros dans cette matrice.

3.b. θ étant un réel quelconque, montrer que $(g(e_p), g(e_q))$ est une base orthonormée de G.

- Montrer que la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que $B \in S_n$, et déterminer la valeur de $N(B) - N(A)$.

3.c. θ étant un réel quelconque, on pose :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On note de plus :

- f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A,
- p l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur G qui à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ associe sa projection orthogonale sur G,
- $\tilde{f}$ l'endomorphisme de G défini par : $\forall u \in G, \tilde{f}(u) = p(f(u))$.

- Déterminer la matrice de $\tilde{f}$ dans la base (e_p, e_q), puis dans la base $(g(e_p), g(e_q))$.

- En déduire une relation entre les matrices $\tilde{\mathrm{A}}, \tilde{\mathrm{B}}$ et $\tilde{\Omega}$.

- En déduire que $tr(\tilde{\mathrm{B}}) = tr(\tilde{\mathrm{A}})$ et $N(\tilde{\mathrm{B}}) = N(\tilde{\mathrm{A}})$.

3.d. On suppose $a_{pq} \neq 0$.

- Montrer, en séparant les cas $a_{pp} = a_{qq}$ et $a_{pp} \neq a_{qq}$, qu'il existe, dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, une unique valeur θ_0 de θ telle que $b_{pq} = 0$ et donner la valeur de θ_0. Dans le cas où $a_{pp} \neq a_{qq}$, on commencera par déterminer X_{θ_0}.

3.e. On suppose $a_{pq} = 0$. On pose, dans ce cas, $\theta_0 = 0$.

- Montrer que la valeur $\theta = \theta_0$ conduit à $b_{pq} = 0$.

Dans la suite du problème, on note $\theta_{p,q}$ l'application de S_n dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$\theta_{p,q}(\mathrm{A}) = \theta_0$, où θ_0 est le nombre (dépendant de A) introduit aux questions **3.d.** et **3.e.**
On désigne alors par $\varphi_{p,q}$ l'application de S_n dans S_n définie par $\varphi_{p,q}(\mathrm{A}) = \mathrm{B}_{\theta_0}$.

4. Soit (p,q) un couple d'entiers tel que $1 \leq p < q \leq n$.

- Déterminer les matrices $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in S_n$ telles que $\varphi_{p,q}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$.

L'attention du candidat est attirée sur la nécessité de mener très soigneusement les calculs de la question suivante.

5. Soit (p,q) un couple d'entiers tel que $1 \leq p < q \leq n$, et soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in S_n$.
On pose $\theta = \theta_{p,q}(\mathrm{A})$, $\mathrm{B} = (b_{ij}) = \varphi_{p,q}(\mathrm{A})$, $t = \tan\theta$ et, si $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, $X = \tan 2\theta$.

5.a. Calculer b_{ii} pour $i \notin \{p,q\}$.

- En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}{}^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}{}^2$.

On utilisera le résultat de la question **3.c**.

5.b. On suppose que $j \notin \{p,q\}$.

- Calculer b_{pj} en fonction de $\cos\theta$, de $\sin\theta$ et des coefficients de A.

5.c. On suppose que $j \notin \{p,q\}$.

- Calculer b_{qj} en fonction de $\cos\theta$, de $\sin\theta$ et des coefficients de A.

5.d. On suppose $i \notin \{p,q\}$ et $j \notin \{p,q\}$.

- Calculer b_{ij} en fonction de $\cos\theta$, de $\sin\theta$ et des coefficients de A.

Les questions **5.e.** *à* **5.i.** *visent à obtenir une expression des coefficients b_{ij} qui ne fasse pas intervenir de fonctions trigonométriques.*

5.e. On suppose $a_{pp} \neq a_{qq}$.

- Montrer que $a_{pp} + ta_{pq} = \dfrac{1}{1+t^2}\left(a_{pp} + t^2 a_{qq} + 2ta_{pq}\right)$.
- Montrer que cette relation est encore vraie si $a_{pp} = a_{qq}$.

5.f. En déduire une expression de b_{pp} en fonction de t et des coefficients de A.

5.g. Déduire de la question précédente une expression de b_{qq} en fonction de t et des coefficients de A.

5.h. Pour $i \notin \{p,q\}$, exprimer b_{pi} et b_{qi} en fonction de t et des coefficients de A.

5.i. On suppose $a_{pq} \neq 0$ et $a_{pp} \neq a_{qq}$.

- Exprimer t en fonction des coefficients de A.

TROISIEME PARTIE

Plusieurs questions de cette partie peuvent être traitées correctement même dans le cas où l'on n'aurait pas répondu à toutes les questions de la deuxième partie.

On pose $\mathrm{T} = \left\{(i,j) \in [n]^2, i < j\right\}$.

Pour toute matrice $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right) \in S_n$, on pose alors :

$$m(\mathrm{A}) = \max_{(i,j)\in \mathrm{T}} \left|a_{ij}\right|,$$
$$e(\mathrm{A}) = \left\{(p,q) \in \mathrm{T}, \left|a_{pq}\right| = m(\mathrm{A})\right\},$$
$$l(\mathrm{A}) = \min\left\{p \in \{1,\dots,n-1\}, \exists q \in \{p+1,\dots,n\}, (p,q) \in e(\mathrm{A})\right\},$$
$$c(\mathrm{A}) = \min\left\{q \in \{2,\dots,n\}, (l(\mathrm{A}),q) \in e(\mathrm{A})\right\}.$$

1. Pour cette seule question, on prend $n = 4$.

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; déterminer $l(\mathrm{A})$ et $c(\mathrm{A})$.

Dans la suite, n désigne à nouveau un quelconque entier supérieur ou égal à 2.

On considère l'application ψ de S_n dans S_n définie par :

$$\forall \mathrm{A} \in S_n, \psi(\mathrm{A}) = \varphi_{p,q}(\mathrm{A}), \text{ avec } p = l(A) \text{ et } q = c(A)$$

2. Soit $A = (a_{ij}) \in S_n$.

2.a. Montrer que $H(A) \leq n(n-1)a_{pq}{}^2$, où $p = l(A)$ et $q = c(A)$.

2.b. Déterminer $H(A) - H(\psi(A))$
(on pourra utiliser les questions **3.b.** et. **5.a.** de la deuxième partie).

2.c. Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\rho < 1$, dépendant de n mais non de A, tel que $\forall A \in S_n, H(\psi(A)) \leq \rho H(A)$.

3. Soit $A = (a_{ij}) \in S_n$. Soit (A_k) la suite dans S_n définie par récurrence de la façon suivante :

$$A_0 = A,$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ A_{k+1} = \psi(A_k).$$

3.a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, A_k est semblable à A.

3.b. On suppose que la suite (A_k) est stationnaire :

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ k \geq k_0 \Rightarrow A_k = A_{k_0}.$$

- Prouver que la matrice A_{k_0} est diagonale.
- Prouver que les coefficients diagonaux de A_{k_0} sont les valeurs propres de A.

On ne suppose plus la suite (A_k) nécessairement stationnaire.

3.c. Montrer que la suite $H(A_k)$ est convergente.
- Quelle est sa limite ?

On peut démontrer, et le candidat admettra, l'inégalité suivante :

$$\forall M \in S_n, N(\psi(M) - M) \leq \sqrt{6H(M)}$$

3.d. Montrer que, dans l'espace vectoriel M_n muni de la norme N, (A_k) est une suite de Cauchy.
- En déduire que (A_k) converge vers une matrice que l'on notera D.

3.e. Montrer que l'application qui, à toute matrice $A \in M_n$, associe le nombre $H(A)$, est continue sur l'espace vectoriel normé (M_n, N).
- En déduire que D est une matrice diagonale.

3.f. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ étant muni d'une norme, montrer que l'application qui, à toute matrice $A \in M_n$, associe son polynôme caractéristique, est continue sur l'espace vectoriel normé (M_n, N).
- En déduire que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A.