CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations, données et objectif

- On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{R}$ le corps des réels.
- Si E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie, on note $\dim E$ la dimension de E.
- Pour toute application linéaire ϕ, on note $\operatorname{Ker}\phi$ le noyau de ϕ, et $\operatorname{Im}\phi$ son image.
- Pour $k \in \mathbf{N}$ et $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, avec $x_1 < x_2$, on note $C^k[x_1, x_2]$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^k sur $[x_1, x_2]$. En particulier, $C^0[x_1, x_2]$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[x_1, x_2]$.
- α et β sont deux éléments donnés de $C^0[0,1]$. On suppose que $\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Le problème concerne la recherche de solutions approchées pour le "problème aux limites" suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in C^2[0,1] \text{ telle que :} \\ \forall x \in [0,1], \quad -f''(x) + \alpha(x) f(x) = \beta(x) \\ \qquad f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

- On pose

$S = \{ f \in C^2[0,1], \forall x \in [0,1], -f''(x) + \alpha(x) f(x) = \beta(x) \text{ et } f(0) = f(1) = 0 \}$.

PREMIERE PARTIE

On pose $S_E = \left\{f \in C^2[0,1]; \forall x \in [0,1], -f''(x)+\alpha(x)f(x)=\beta(x)\right\}$,
et $S_H = \left\{f \in C^2[0,1]; \forall x \in [0,1], -f''(x)+\alpha(x)f(x)=0\right\}$.

1.1.1/ Prouver qu'il existe un unique couple $(g,h) \in {S_H}^2$ tel que
$$g(0)=h'(0)=0 \text{ et } g'(0)=h(0)=1.$$

1.1.2/ Montrer que S_E est non vide.

Dans la suite de cette première partie, g et h désignent les fonctions définies à la question 1.1.1/, et on se donne un élément $l \in S_E$.

1.2/ Déterminer l'ensemble $\left\{ l+rg+sh; (r,s) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

1.3/ Montrer que $g(1) \neq 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde dans lequel on s'intéressera au signe de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 g'(x)^2 dx$).

1.4/ Montrer qu'il existe un unique couple de réels (r_0,s_0) tel que $(l+r_0g+s_0h) \in S$.
On exprimera r_0 et s_0 à l'aide des fonctions l, g et h.

1.5/ En déduire que S est un singleton.

Dans la suite du problème, on adopte les notations suivantes :

- $F=\left\{v \in C^0[0,1], v \text{ est } C^1 \text{ par morceaux}\right\}$.
- $V=\left\{v \in F, v(0)=v(1)=0\right\}$.
- Pour toute fonction $v \in F$, $D(v)$, ou plus simplement Dv, désigne la fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$Dv(0)=v'_d(0),\ Dv(1)=v'_g(1) \text{ et, si } x \in]0,1[,\ Dv(x)=\frac{1}{2}\left(v'_g(x)+v'_d(x)\right),$$
où $v'_g(x)$ et $v'_d(x)$ désignent respectivement la dérivée à gauche et à droite de v en x.

- $\tilde{a}$ et b désignent les applications définies respectivement par :
$$\begin{cases} \tilde{a} : F^2 \to \mathbf{R} \\ (u,v) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (DuDv+\alpha uv)(x)dx \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b : F \to \mathbf{R} \\ v \mapsto \displaystyle\int_0^1 (\beta v)(x)dx \end{cases}.$$

DEUXIEME PARTIE

2.1/ Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse ; chaque réponse sera rapidement justifiée.

2.1.1/ F est un espace vectoriel réel.

2.1.2/ V est un sous-espace vectoriel de F.

2.1.3/ b est une forme linéaire sur F.

2.1.4/ $\forall (u,v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbf{R},\ D(u+\lambda v) = Du + \lambda Dv$.

2.1.5/ $\tilde{a}$ est une forme bilinéaire symétrique sur F.

2.1.6/ Pour $w \in C^1[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1], Dw(x) = w'(x)$.

2.2/ Soit $w \in C^1[0,1]$ et $v \in F$. En utilisant une subdivision de l'intervalle d'intégration considéré, prouver chacune des propriétés suivantes :

2.2.1/ Pour $(y,z) \in [0,1]^2$ tel que $y < z$, on a : $\int_y^z Dv(x)dx = v(z) - v(y)$.

2.2.2/ $\int_0^1 w'(x)v(x)dx = [w(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 w(x)Dv(x)dx$.

2.3/ Pour $u \in F$, on définit une application notée Ψ_u par :

$$\begin{cases} \Psi_u : F \to \mathbf{R} \\ \qquad v \mapsto \tilde{a}(u,v) - b(v) \end{cases}.$$

2.3.1/ Montrer que $\Psi_u(V)$ est égal soit à $\{0\}$, soit à $\mathbf{R}$.

2.3.2/ Soit $f \in S$. Déterminer $\Psi_f(V)$ dans ce cas (on pourra utiliser la propriété 2.2.2/).

2.4/ Pour cette seule question, on suppose α identiquement nulle sur $[0,1]$.
Déterminer l'ensemble $\{u \in F,\ \tilde{a}(u,u) = 0\}$.

Dans la suite, on revient à la seule hypothèse $\alpha \geq 0$ sur $[0,1]$.
On note a la restriction de $\tilde{a}$ à V^2.

2.5/ Déterminer l'ensemble $\{u \in V, a(u,u) = 0\}$, et montrer que l'application a est un produit scalaire sur V.

Dans la suite du problème, V est muni d'une structure d'espace préhilbertien réel par le produit scalaire a. Ainsi, deux vecteurs u et v de V sont orthogonaux si, et seulement si, on a $a(u,v) = 0$. La norme associée à a est notée N.

2.6/ On note J l'application de V sur $\mathbf{R}$ définie par : $\forall v \in V,\ J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - b(v)$.

2.6.1/ Soient $f \in S$ et $w \in V$. Montrer que la quantité $J(f+w) - J(f)$ peut se ramener à une expression où ne figure pas f. (on utilisera le résultat de la question 2.3.2/).

2.6.2/ Retrouver ainsi le fait que S ne possède pas plus d'un élément.

2.7/ On pose $S_2 = \{u \in V; \forall v \in V, a(u,v) = b(v)\}$. A-t-on $S_2 = S$?

TROISIEME PARTIE

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ et, pour $k \in \{0,\ldots,n+1\}$, $x_k = k\varepsilon$.

On pose de plus :

$A = \{v \in V; \forall k \in \{0,\ldots,n\},\ v$ coïncide sur $[x_k, x_{k+1}]$ avec une fonction affine $\}$.

3.1/ Vérifier que A est un sous-espace vectoriel de V.

3.2/ Soit σ l'application linéaire de A vers $\mathbf{R}^n$ définie par :

$$\forall v \in A,\ \sigma(v) = (v(x_1),\ldots,v(x_n)).$$

3.2.1/ Déterminer $\operatorname{Ker}\sigma$ et $\operatorname{Im}\sigma$.

3.2.2/ En déduire que A est un espace vectoriel de dimension finie, et préciser $\dim A$.

Dans la suite du problème, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, φ_k désigne l'unique élément de A tel que :

$$\begin{cases} \varphi_k(x_i)=0 \text{ si } i \neq k \\ \varphi_k(x_k)=1 \end{cases}$$

3.2.3/ Montrer que la famille $(\varphi_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une base de A.

3.2.4/ Soit $x \in [0,1]$. Exprimer $\varphi_k(x)$ en fonction de x, k et ε, en distinguant selon que $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $x \in]x_k, x_{k+1}]$ ou $x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}]$.

3.2.5/ On considère l'application p définie par :

$$\begin{cases} p : V \to V \\ v \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v(x_k)\varphi_k . \end{cases}$$

Déterminer $\operatorname{Im} p$. Montrer que p est un projecteur.

3.3/ Montrer l'existence et l'unicité de $g \in A$ telle que $\forall v \in A, a(g,v) = b(v)$.

Dans la suite du problème, on note g la fonction définie à la question 3.3/ .

3.4/ Déterminer l'ensemble $T = \{w \in A, \forall j \in \{1,..,n\}, a(w,\varphi_j) = b(\varphi_j)\}$.

3.5/ Pour $i \in \{1,..,n\}$, on pose $g_i = g(x_i)$. On note G le vecteur colonne $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$.

3.5.1/ Utiliser la question 3.4/ pour trouver une matrice carrée M symétrique inversible dont les coefficients s'expriment à l'aide de l'application a et des fonctions φ_k, et un vecteur colonne B dont les coefficients s'expriment à l'aide de b et des φ_k, tels que G vérifie la relation matricielle $MG = B$.

3.5.2/ Pour cette seule question, on suppose la fonction α constante, l'unique valeur prise par cette fonction étant notée simplement α. Exprimer les coefficients de M en fonction de α et ε (des changements de variables très simples pourront faciliter le calcul des intégrales exprimant ces coefficients).

QUATRIEME PARTIE

On note f l'unique élément de l'ensemble S.

On pose $K_0 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|$ et $L = \max_{x\in[0,1]} |\alpha(x)|$.

On pose $h = p(f)$, où p désigne le projecteur défini à la question 3 2.5/.
On rappelle que g désigne la fonction définie à la question 3.3/.

On rappelle également que l'application a confère à l'espace vectoriel V une structure d'espace préhilbertien réel, et que la norme associée à a est notée N.

4.1/ Déterminer la projection orthogonale de f sur A (on utilisera notamment le résultat de la question 2.3.2/).

4.2/ Montrer que $N(f-g) \leq N(f-h)$.

4.3/ Soit $k \in \{0,..,n\}$. Pour alléger l'écriture, on pose $y = x_k$ et $z = x_{k+1}$.

4.3.1/ Vérifier que la restriction de h à l'intervalle fermé $[y,z]$ appartient à $C^2[y,z]$.

4.3.2/ On admet que pour toute fonction $\psi \in C^1[y,z]$, telle que $\psi(y) = \psi(z) = 0$, il existe $c \in]y,z[$, tel que $\psi'(c) = 0$.

Montrer qu'il existe une constante K_1, indépendante de x, de n, et de k, telle que :

$$\forall x \in]y,z[, \left|(f-h)'(x)\right| \leq K_1\varepsilon.$$

On exprimera K_1 en fonction de K_0.

4.3.3/ En déduire une majoration de $\int_y^z (Df - Dh)^2(x)dx$ en fonction de ε et K_1.

4.3.4/ Montrer qu'il existe une constante K_2, indépendante de x, de n, et de k, telle que :

$$\forall x \in [y,z], |(f-h)(x)| \leq K_2\varepsilon^2.$$

On exprimera K_2 en fonction de K_1.

4.3.5/ En déduire une majoration de $\int_y^z (f-h)^2(x)dx$ en fonction de ε et K_2.

4.4/ Montrer qu'il existe une constante K indépendante de n, telle que :

$$N(f-g) \leq K\varepsilon.$$

On exprimera K en fonction de L et K_0.