CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectifs

On désigne par $\mathcal{C}(2\pi)$ (resp. $\mathcal{C}m(2\pi)$) le **R**-espace vectoriel des applications de **R** dans **R**, 2π-périodiques continues (resp. continues par morceaux).

Lorsque $\varphi \in \mathcal{C}m(2\pi)$ et $k \in \mathbf{Z}$ on note $c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)e^{-ikt}dt$ le coefficient de Fourier d'indice k de φ.

Lorsque $k \in \mathbf{N}$ on note :

$$a_k = a_k(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos(kt)dt \quad \text{et} \quad b_k = b_k(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin(kt)dt\,;$$

les a_k et les b_k sont les coefficients de Fourier réels de φ et on appelle série de Fourier réelle de φ la série :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right].$$

Si $z \in \mathbf{C}$ on note $\bar{z}$ le nombre complexe conjugué de z et $|z|$ le module de z.

Cette épreuve comporte trois parties indépendantes les unes des autres.

Dans la partie I, on étudie et on explicite une fonction f définie comme somme d'une série trigonométrique.

Dans la partie II, on étudie une condition suffisante portant sur la fonction φ pour que les sommes $\sum_{k=-n}^{n}|c_k(\varphi)|$ soient majorées indépendamment de n.

Dans la partie III, on étudie les valeurs propres d'une matrice $M_n(\varphi)$ construite à partir des coefficients $c_k(\varphi)$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

I.1/ On considère l'équation différentielle (E) $y''+y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta \cos t$

où α, β, γ, δ désignent quatre constantes réelles.

Déterminer les solutions réelles de l'équation (E)

I.1.1/ lorsque $\delta = 0$,

I.1.2/ lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

I.1.3/ dans le cas général.

I.2/ Soit F l'application 2π-périodique de **R** dans **R** définie par

« pour tout $t \in \,]-\pi, \pi]$: $F(t) = t^2$ ».

I.2.1/ Déterminer la série de Fourier réelle de F.

I.2.2/ Etudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier réelle de F et préciser sa somme.

I.3/ On désigne respectivement par f, g et h les trois fonctions définies pour t réel, par

$$f(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(k^2-1)} \cos(kt),$$

$$g(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k^2-1)} \sin(kt),$$

$$h(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1} \cos(kt),$$

lorsque les séries convergent.

I.3.1/ Montrer que les fonctions f, g et h sont définies sur **R**.

I.3.2/ Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur **R** et exprimer f ' et f '' en fonction de g et h.

I.3.3/ Quelle est la valeur de $f'(0)$?

I.3.4/ Calculer explicitement la valeur de $f''(\pi)$.

I.3.5/ Déduire de ce qui précède, en particulier de I.2, que la fonction f est solution sur $]-\pi, \pi]$ de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y''+ y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta \cos t$$

pour des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que l'on explicitera.

I.3.6/ Déduire de I.3.5/ que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ et donner l'expression explicite de $f'''(t) + f'(t)$ pour $t \in \,]-\pi, \pi[$.

I.3.7/ La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^3$ sur **R** ?

I.3.8/ Expliciter $f(t)$ pour $t \in \,]-\pi, \pi]$.

PARTIE II

Dans cette partie on désigne par φ une fonction quelconque de $\mathcal{C}m(2\pi)$ et on pose :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ S_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} \left|c_k(\varphi)\right|.$$

L'objet de cette partie est l'étude d'une condition suffisante de convergence de la suite $(S_n(\varphi))_{n \in \mathbf{N}}$

II.1/ On considère l'application φ_1 2π-périodique, impaire, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0$ et $\varphi_1(t) = \pi$ pour $t \in]0, \pi[$.

La suite $S_n(\varphi_1)$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite de cette partie on désigne par φ une fonction appartenant à $\mathcal{C}(2\pi)$ et l'on suppose que φ vérifie la condition :

($\mathcal{L}$) « il existe $A_1 \in \mathbf{R}_+$ et $s \in]0,1]$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on ait :

$$\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \leq A_1 \left|x - y\right|^s \text{ ».}$$

Etant donné $h \in \mathbf{R}_+^*$ on associe à φ la fonction ψ_h définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\psi_h(t) = \varphi(t + h) - \varphi(t - h).$$

II.2/ Montrer que pour tout $h \in \mathbf{R}_+^*$ la fonction $\psi_h \in \mathcal{C}(2\pi)$.

II.3/ Exprimer le coefficient de Fourier $c_k(\psi_h)$ en fonction de $c_k(\varphi)$.

II.4/ Justifier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'inégalité :

$$\sum_{k=-n}^{n} \sin^2(kh)\left|c_k(\varphi)\right|^2 \leq \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\psi_h(t)\right)^2 dt.$$

II.5/ En déduire qu'il existe $A_2 \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait l'inégalité :

$$\sum_{k=-n}^{n} \sin^2(kh)\left|c_k(\varphi)\right|^2 \leq A_2 \cdot h^{2s}.$$

II.6/ Pour $p \in \mathbf{N}^*$ on considère les ensembles I_p définis par :

$$I_p = \{k \in \mathbf{Z} \ / \ 2^{p-1} \leq |k| \leq 2^p - 1\}$$

et on note $H(p)$ le cardinal de I_p.

Tournez la page S.V.P.

II.6.1/ Expliciter $H(p)$.

II.6.2/ Montrer que pour tout $k \in I_p$ on a l'égalité :

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

II.6.3/ Justifier, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, l'inégalité :

$$\left(\sum_{k \in I_p} |c_k(\varphi)|\right)^2 \leq H(p) \sum_{k \in I_p} |c_k(\varphi)|^2.$$

II.6.4/ On suppose que $s > \frac{1}{2}$; établir la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(H(p))^{1/2}}{\left(2^{p+1}\right)^s}$; déduire alors de tout ce qui précède que la suite $(S_n(\varphi))_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée, puis préciser sa nature.

PARTIE III

Dans cette partie : $n \in \mathbf{N}^*$ et on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{C}$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on note $M = (\mu_{j,k})$ avec $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq n$, où $\mu_{j,k}$ désigne l'élément de la j-ième ligne et de la k-ième colonne de la matrice M.

Lorsque $\varphi \in \mathcal{C}m(2\pi)$ on définit la matrice $M_n(\varphi) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ par

$$M_n(\varphi) = (\mu_{j,k}(\varphi)) \text{ avec } \mu_{j,k}(\varphi) = c_{j-k}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-i(j-k)t}\,dt.$$

L'objet de cette partie est l'étude de quelques propriétés des valeurs propres de $M_n(\varphi)$.

III.1/ Soit $\sigma \in \mathbf{R}$, on considère la fonction φ_0 définie sur $\mathbf{R}$ par :

« pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi_0(t) = \sigma$ ».

Expliciter alors la matrice $M_n(\varphi_0)$ et préciser ses valeurs propres.

III.2/ Dans cette question on suppose que $\varphi = \varphi_1$ (fonction définie au II.1 : 2π-périodique impaire telle que $\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0$ et $\varphi_1(t) = \pi$ pour $t \in]0, \pi[$).

III.2.1/ Expliciter la matrice $M_3(\varphi_1)$.

III.2.2/ Calculer les valeurs propres de $M_3(\varphi_1)$.

III.3/ Dans cette question on suppose que $\varphi = f$ où f désigne la fonction définie au I.3 :

$$f(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(k^2-1)} \cos(kt).$$

III.3.1/ Déterminer la valeur des coefficients $c_k(f)$ pour $k \in \mathbf{Z}$ (on justifiera la réponse avec soin).

III.3.2/ Expliciter la matrice $M_3(f)$ et calculer ses valeurs propres.

Dans toute la suite du problème $\varphi \in \mathcal{C}m(2\pi)$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

III.4/ Exprimer ${}^t M_n(\varphi)$ (matrice transportée de la matrice $M_n(\varphi)$) en fonction de la matrice $M_n(\varphi)$ dans les cas suivants :

III.4.1/ lorsque la fonction φ est paire,

III.4.2/ lorsque la fonction φ est impaire.

III.5/ Soient λ_r, $1 \le r \le n$ les valeurs propres (complexes) de $M_n(\varphi)$;

exprimer $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r$ en fonction de $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt$.

III.6/ Etant donné n nombres complexes z_j, $1 \le j \le n$, on considère la matrice colonne $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ et

on note ${}^t\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \cdots & \overline{z}_n \end{pmatrix}$ la conjuguée de la transposée de Z. On pose alors $\mathcal{P} = {}^t\overline{Z} M_n(\varphi) Z$ et on note $\theta(n, \varphi, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ou pour simplifier, $\theta(n, \varphi, Z)$ l'unique coefficient de la matrice $\mathcal{P}$.

III.6.1/ Exprimer $\theta(n, \varphi, Z)$ en fonction de $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} z_k e^{ikt} \right|^2 \varphi(t)dt$.

III.6.2/ En déduire que toutes les valeurs propres de $M_n(\varphi)$ sont réelles.

Tournez la page S.V.P.

III.6.3/ On suppose, dans cette question, que $\varphi(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}_+$.
Montrer que le nombre $\theta(n, \varphi, Z)$ est réel et positif ou nul.

III.6.4/ On désigne de nouveau par φ une fonction quelconque de $\mathcal{C}m(2\pi)$.
Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a \leq b$, tel que $\varphi(\mathbf{R}) \subset [a, b]$. Déduire de ce qui précède, en particulier, de III.1 et III.6.3, que toutes les valeurs propres de $M_n(\varphi)$ appartiennent à l'intervalle $[a, b]$.

III.7/Pour simplifier on notera c_k au lieu de $c_k(\varphi)$ les coefficients de Fourier de φ.

On rappelle (ou, le cas échéant, on demande d'admettre) que :

- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure ;
- l'égalité de Parseval est valable pour toutes les fonctions de $\mathcal{C}m(2\pi)$.

III.7.1/ Calculer la trace de la matrice $(M_n(\varphi))^2$ en fonction de $|c_0|^2, |c_1|^2, \ldots |c_{n-1}|^2$.

III.7.2/ Exprimer $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\lambda_r)^2$ en fonction de $|c_0|^2, |c_1|^2, \ldots |c_{n-1}|^2$ (où λ_r, $1 \leq r \leq n$, désignent les valeurs propres de $M_n(\varphi)$).

III.7.3/ Soit u une suite de nombres réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge. Quelle est la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} u_k$ lorsque $n \to +\infty$?

III.7.4/ Montrer, en utilisant ce qui précède, que la suite $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\lambda_r)^2$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$ et exprimer cette limite en fonction de $\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi(t))^2 dt$.

Fin de l'énoncé.