CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

Une feuille de papier millimétré devra être distribuée avec le sujet.

Le problème est consacré à l'étude des courbes dites "courbes de Bézier", du nom de l'ingénieur français Bézier, l'un des créateurs, dans les années 1960, de cet outil très répandu aujourd'hui dans l'industrie automobile et plus généralement dans le vaste domaine d'applications que constitue la conception assistée par ordinateurs (CAO).

Notations utilisées dans le problème et quelques rappels

$\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ le corps des réels. Les notations usuelles en découlent pour les ensembles construits à partir de ceux-là. Par exemple, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, etc.

Dans tout le problème, le plan vectoriel réel $\mathbf{R}^2$ est muni de la base canonique $(\vec{i},\vec{j})$:

$$\begin{cases} \vec{i} = (1,0) \\ \vec{j} = (0,1) \end{cases}$$

Chaque vecteur $\vec{u} \in \mathbf{R}^2$ s'identifie ainsi au couple de ses coordonnées dans la base canonique.

Un point de vue différent mais cohérent avec ce qui précède permet que les éléments de $\mathbf{R}^2$ soient parfois appelés *points*, l'ensemble $\mathbf{R}^2$ étant alors muni de sa structure de plan affine et repéré par le repère canonique $(O,\vec{i},\vec{j})$, où $O=(0,0)$. Tout point du plan s'identifie alors au couple de ses coordonnées dans ce repère. On pourra ainsi écrire simplement :

$$M=(x,y)$$

pour exprimer que les coordonnées du point M dans le repère canonique sont (x,y).

Etant donné deux points M et N, on posera $N-M=\overrightarrow{MN}$. Cette écriture est cohérente avec les conventions précédentes, comme le montre la relation existante entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ et celles des points M et N.
De façon équivalente, on pourra écrire :

$$N=M+\overrightarrow{MN}.$$

Tournez la page S.V.P.

Plus généralement, si n désigne un entier naturel non nul, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ une famille de n scalaires et $(P_1,\ldots,P_n)$ une famille de n points, l'expression $\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\ldots+\lambda_n P_n$ désignera le point (ou, selon le contexte, le vecteur) dont les coordonnées sont données conformément à cette expression.

En particulier, si le n-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ vérifie $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$, l'expression $\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\ldots+\lambda_n P_n$ désigne le barycentre des points $(P_1,\ldots,P_n)$ affectés respectivement des poids $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Le candidat remarquera qu'avec ces conventions, la propriété d'*associativité du barycentre* s'exprime d'une façon très simple et naturelle.

Pour tout entier n, on note $\mathbf{L}_n$ l'ensemble des n-uplets de points du plan.
Autrement dit, $\mathbf{L}_n=(\mathbf{R}^2)^n$.
On ne fera pas de différence entre $\mathbf{L}_1$ et le plan $\mathbf{R}^2$.

Par ailleurs, on note $\mathbf{A}$ l'ensemble des courbes paramétrées c de la forme

$$\begin{aligned} c : [0,1] &\to \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t),y(t)) \end{aligned}$$

avec x et y fonctions continues du paramètre $t\in[0,1]$.

On définit par récurrence une suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications en posant :

1) B_0 est l'application de $\mathbf{L}_1$ dans $\mathbf{A}$ qui à tout point $P\in\mathbf{L}_1$ associe la courbe paramétrée constante (de trajectoire réduite à un point)

$$\left\| \begin{aligned} B_0(P) : [0,1] &\to \mathbf{R}^2 \\ t &\to P \end{aligned} \right.$$

2) Pour tout $n\geq 1$, B_n est l'unique application de l'ensemble $\mathbf{L}_{n+1}$ dans l'ensemble $\mathbf{A}$ qui satisfasse la relation

$$\left\| \begin{aligned} &\forall (P_0,P_1,\ldots,P_n)\in\mathbf{L}_{n+1}\,\forall t\in[0,1], \\ &B_n(P_0,P_1,\ldots,P_n)(t)=(1-t)B_{n-1}(P_0,P_1,\ldots,P_{n-1})(t)+tB_{n-1}(P_1,\ldots,P_n)(t) \end{aligned} \right.$$

L'arc paramétré

$$\left\| \begin{aligned} B_n(P_0,\ldots,P_n) : [0,1] &\to \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto B_n(P_0,\ldots,P_n)(t) \end{aligned} \right.$$

est appelé la *courbe de Bézier associée aux* $(n+1)$ *pôles* $P_0,P_1,\ldots,P_n$.

Afin d'alléger la notation, pour toute famille $F\in\mathbf{L}_{n+1}$, la courbe de Bézier associée aux $(n+1)$ pôles F sera le plus souvent notée $B_{n,F}$ ou même B_F.

De façon générale, et sauf mention explicite du contraire dans l'énoncé, on ne fera pas appel aux coordonnées des points.

PARTIE I

I.1/ Cas $n = 1$.
Soit $F = (P_0, P_1) \in \mathbf{L}_2$.

I.1.1/ Exprimer, en fonction du paramètre t et des points P_0 et P_1, le point courant de la courbe de Bézier associée à la famille F, c'est-à-dire le point $B_F(t) = B_{1,F}(t)$.

I.1.2/ Quelle est la trajectoire de l'arc paramétré B_F ?

I.2/ Cas $n = 2$.
Soit $F = (P_0, P_1, P_2) \in \mathbf{L}_3$.

I.2.1/ Soit, pour $i \in \{0,1\}$, Q_i le milieu de P_i et P_{i+1}. Montrer que $B_F\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu de Q_0 et Q_1.

I.2.2/ Déterminer $B_F(0)$ et $B_F(1)$.

I.2.3/ Exprimer en fonction de t le point courant $B_F(t)$ comme barycentre des trois pôles P_0, P_1 et P_2, avec des coefficients dont la somme fait 1.

I.2.4/ On suppose $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (0,0)$ et $P_2 = (0,1)$.

I.2.4.1/ Calculer $\dfrac{d^2(B_F(t))}{dt^2}$; en déduire la nature de la trajectoire de l'arc paramétré B_F.

I.2.4.2/ Tracer la trajectoire de B_F (on prendra $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé avec une unité de longueur de 4 cm).

PARTIE II

II.1/ On rappelle qu'une partie non vide K du plan est convexe si et seulement si

$$\forall (M,N) \in K^2, \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)M + \lambda N \in K.$$

II.1.1/ Montrer qu'une partie non vide K du plan est convexe si et seulement si

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (M_1, \dots, M_n) \in K^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_k \in K.$$

II.1.2/ Soit E une partie non vide du plan, et soit W un ensemble non vide de parties convexes du plan contenant E. Montrer que l'intersection de tous les convexes appartenant à W, c'est-à-dire $\bigcap_{K \in W} K$, est un convexe contenant E.

Dans la suite, pour toute partie non vide E du plan, on note $C(E)$ l'enveloppe convexe de E, c'est-à-dire l'intersection de toutes les parties convexes du plan contenant E.

II.1.3/ Soit E une partie non vide du plan. Montrer l'équivalence

$$E \text{ convexe} \Leftrightarrow E = C(E).$$

II.1.4/ Soient G et H deux parties non vides du plan. Prouver l'implication

$$(G \subset H) \Rightarrow (C(G) \subset C(H)).$$

II.1.5/ Soit E une partie non vide du plan. Montrer que

$$C(E)=\left\{M\in\mathbf{R}^2,\exists n\in\mathbf{N}^*,\exists(M_1,\dots,M_n)\in E^n,\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in(\mathbf{R}_+)^n,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1 \text{ et } M=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k M_k\right\}$$

Dans la suite, pour tout entier naturel n et toute famille de points $F\in\mathbf{L}_n$, on notera encore $C(F)$ l'enveloppe convexe des points formant la famille F.

II.1.6/ Démontrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n et toute famille $F\in\mathbf{L}_{n+1}$, la trajectoire de $B_{n,F}$ est incluse dans $C(F)$.

II.2/

II.2.1/ Soit φ une transformation affine du plan. Démontrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n et toute famille $F\in\mathbf{L}_{n+1}$, on a

$$\forall t\in[0,1],\ \varphi\big(B_{n,F}(t)\big)=B_{n,\varphi(F)}(t),$$

où $\varphi(F)$ désigne la famille obtenue en appliquant φ à chacun des points de la famille F.

II.2.2/ Soit un triangle quelconque $P_0P_1P_2$, non aplati ; en s'aidant de la question **I.2.4**, tracer à main levée la courbe de Bézier associée, et justifier le tracé. Déduire également de la question **I .2.4** la nature de cette courbe.

PARTIE III

III.1/ Fonctions de mélange.

III.1.1/ Démontrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n il existe $n+1$ fonctions polynômes $b_{n,k}:[0,1]\to[0,1]$, de degré inférieur ou égal à n, telles que, pour toute famille $F=(P_0,\dots,P_n)\in\mathbf{L}_{n+1}$, on ait

$$B_{n,F}(t)=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)P_k\,.$$

*On ne cherchera pas dans cette question **III.1.1** à exprimer explicitement les fonctions* $b_{n,k}$ *(appelées fonctions de mélange).*

Au cours de la démonstration demandée, le candidat mettra en évidence la relation entre $b_{n+1,k}, b_{n,k}$ et $b_{n,k-1}$ vérifiée lorsque $1\le k\le n$, ainsi que la relation entre $b_{n+1,0}$ et $b_{n,0}$ et celle qui a lieu entre $b_{n+1,n+1}$ et $b_{n,n}$.

III.1.2/ Pour cette seule question, on prend $n = 3$. Déterminer les polynômes $b_{3,k}(t)$ pour $k\in\{0,\dots,3\}$.

III.1.3/ n désigne à nouveau un entier naturel non nul quelconque. Déterminer, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, une formule simple exprimant $b_{n,k}(t)$ en fonction de t, de n et de k.

Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$*, on pose* $I_{n,k} = \int_0^1 b_{n,k}(t)dt$.

III.1.4/ Déterminer $\sum_{k=0}^{n} I_{n,k}$.

III.1.5/ Déterminer, en fonction de n et k, la valeur de $I_{n,k}$ (on pourra faire une intégration par parties).

III.2/ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $F = (P_0,\dots,P_n) \in \mathbf{L}_{n+1}$. On note $\tilde{F}$ la famille obtenue à partir de F en inversant l'ordre des pôles : $\tilde{F} = (P_n, P_{n-1},\dots,P_0) \in \mathbf{L}_{n+1}$.

III.2.1/ Quelle relation a-t-on entre $B_{n,\tilde{F}}$ et $B_{n,F}$?

III.2.2/ Comparer les trajectoires respectives de $B_{n,\tilde{F}}$ et de $B_{n,F}$.

PARTIE IV

IV.1/ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $F = (P_0,\dots,P_n) \in \mathbf{L}_{n+1}$.

Soit $\mathbf{V}$ l'espace vectoriel réel des polynômes à deux variables notées S et T, de degrés partiels inférieurs ou égaux à n.

Autrement dit, les éléments de $\mathbf{V}$ sont de la forme $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} S^i T^j$, avec $\alpha_{ij} \in \mathbf{R}$ pour tout $(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2$.

Les monômes de la forme $S^i T^j$ constituent une base de $\mathbf{V}$, dite base canonique de $\mathbf{V}$.

A tout $t \in [0,1]$, on associe l'application linéaire $\Psi_t : \mathbf{V} \to \mathbf{R}^2$ caractérisée par l'image des vecteurs de la base canonique :

$$\forall (i,j) \in \{0,\dots,n\}^2, \Psi_t\left(S^i T^j\right) = t^j P_i.$$

Par ailleurs, pour tout couple d'entiers naturels (i,j) tel que $i + j \le n$, on pose :

$$C_{i,j} = B_i\left(P_j, P_{j+1},\dots,P_{j+i}\right).$$

IV.1.1/ Trouver un polynôme $Z \in \mathbf{V}$, dont on donnera l'expression en fonction de S et T, tel que pour tout couple d'entiers naturels (i,j) tel que $i + j \le n$, on ait :

$$C_{i,j}(t) = \Psi_t\left(Z^i S^j\right).$$

On pourra faire une démonstration par récurrence sur i.

IV.1.2/ Utiliser le résultat précédent pour retrouver la formule de la question **III.1.3**.

IV.1.3/ Déterminer $B_F(0)$ et $B_F(1)$.

IV.1.4/ Soit $W \in \mathbf{V}$. Vérifier que $\dfrac{d}{dt}\Psi_t(W) = \Psi_t\left(\dfrac{\partial W}{\partial T}\right)$.

IV.1.5/ Exprimer le vecteur dérivé $\frac{d}{dt}B_{n,F}(t)$ à l'aide des points $C_{n-1,0}(t)$ et $C_{n-1,1}(t)$.

IV.1.6/ On suppose les pôles P_i deux à deux distincts. Déterminer la droite tangente à la trajectoire de B_F au point de paramètre $t = 0$; même question en $t = 1$.

IV.1.7/ Dérivée k-ième.

IV.1.7.1/ Z désignant le polynôme introduit à la question **IV.1.1**, déterminer, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial^k (Z^n)}{\partial T^k}$. On laissera l'expression demandée sous forme factorisée.

IV.1.7.2/ Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, exprimer en fonction des pôles le vecteur dérivé k-ième de $B_{n,F}$ en $t = 0$, c'est-à-dire le vecteur $B_{n,F}{}^{(k)}(0)$. Constater que ce vecteur ne dépend que des $k+1$ premiers pôles de la famille F.

IV.2/ Dans cette question, on prend $n = 3$, $P_0 = (-1,0)$, $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (0,-2)$ et $P_3 = (1,0)$. Montrer que la courbe de Bézier associée à cette famille de pôles est symétrique par rapport à O (on pourra exploiter le résultat de la question **II.2.1**), puis tracer cette courbe.
On travaillera sur papier millimétré, avec une unité de 5 cm. Le tracé s'appuiera en particulier sur les tangentes à la courbe aux points de paramètres $t \in \left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$.

PARTIE V

Soit $q \in \mathbf{N}^*$, $(M_1, M_2, \dots, M_q)$ une famille de q points du plan et $(t_1, \dots, t_q)$ une famille de q réels deux à deux distincts pris dans l'intervalle $]0,1[$. Pour tout $k \in \{1,\dots,q\}$ les coordonnées de M_k seront notées (α_k, β_k).

Par ailleurs, soit $n \in \mathbf{N}^*$. La présente partie **V** vise à aborder le problème de la détermination d'une famille de pôles $F \in \mathbf{L}_{n+1}$ telle que la courbe de Bézier B_F s'approche au mieux des points M_k. Plus précisément, on pose

$$\left\| \begin{array}{l} g : \mathbf{L}_{n+1} \to \mathbf{R} \\ \quad G \mapsto \sum_{k=1}^{q} [d(M_k, B_G(t_k))]^2 \end{array} \right.$$

où d désigne la distance euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^2$, et l'on cherche F tel que :

$$g(F) = \min_{G \in \mathbf{L}_{n+1}} g(G).$$

Afin de travailler avec une fonction de plusieurs variables réelles, on identifie $\mathbf{L}_{n+1}$ et $\mathbf{R}^{2n+2}$ grâce à la bijection :

$$\left\| \begin{array}{ll} \gamma : & \mathbf{R}^{2n+2} \to \mathbf{L}_{n+1} \\ & (x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) \mapsto ((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)) \end{array} \right.$$

et la recherche d'un minimum pour g revient à celle d'un minimum de f, où l'on a posé :

$$f = g \circ \gamma.$$

V.1/ Montrer que f est une application de classe C^1 sur $\mathbf{R}^{2n+2}$.

V.2/ Exprimer la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ en fonction des variables $(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n)$, de l'indice $i \in \{0, \ldots, n,\}$, des données du problème et des fonctions de mélange (voir question **III.1**).

Donner de même l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$.

V.3/ Déterminer une matrice carrée non nulle $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{0,\ldots,n\}^2}$ d'ordre $n+1$, un vecteur colonne $U = (u_i)_{0 \le i \le n}$ et un vecteur colonne $V = (v_i)_{0 \le i \le n}$ tel que si $F = ((x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n))$ minimise la fonction g, alors les vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vérifient les systèmes linéaires

$$\begin{cases} AX = U \\ AY = V \end{cases}$$

Bien entendu, l'expression de A, U et V ne doit faire intervenir ni les x_j ni les y_j .

CONCLUSION

Dans le cas où A est inversible, on dispose ainsi d'un procédé pour déterminer la famille F cherchée, car on peut alors démontrer par un argument topologique que cette famille F minimise effectivement la fonction g. En pratique, les choses sont en fait un peu plus complexes, car on ne dispose généralement que des points $(M_1, M_2, \ldots, M_q)$ mais pas des valeurs $(t_1, \ldots, t_q)$.