CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Cette épreuve comporte trois exercices totalement indépendants entre eux et qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

La question 4. de cet exercice est indépendante des trois questions qui précèdent.
La notation th employée à la question 4.c. désigne la fonction tangente hyperbolique.

Soit f l'unique fonction impaire admettant 2π pour période et telle que : $\forall t \in \left]0, \pi\right[, f(t)=1$.

1. Montrer que : $f(0)=f(\pi)=0$, puis calculer $f\left(\dfrac{13\pi}{4}\right)$ en justifiant la réponse fournie.

2. Représenter graphiquement la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

3.
   a. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.

   b. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin\left((2n+1)t\right)}{2n+1}$.

   On énoncera très précisément le théorème utilisé.

   c. En utilisant l'égalité établie à la question précédente 3.b., déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

   d. Appliquer la formule de Parseval à la fonction f et en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

4. Soit x un réel strictement positif fixé.

   a. Montrer que la fonction $t \to \mathrm{e}^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   b. Soit k un entier naturel quelconque.

   Montrer que : $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{-\pi x}\right)}{x}\left(-\mathrm{e}^{-\pi x}\right)^k$.

   c. En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{th}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

Exercice 2

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique *f* définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt$.

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant $f(x)$.

1. Rappeler la définition d'une fonction numérique décroissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   En déduire que *f* est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

   a. Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, \quad \left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \frac{2\,e\left| x - x_0 \right|}{x_0^2}$.

   b. En déduire que *f* est continue au point x_0.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif : $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$.

   En déduire : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$.

4.
   a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que : $\forall t \in [0,1], \quad \left| e^t - 1 \right| \leq M\, t$.

   b. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :
   $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t}\, dt$.
   Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   c. Montrer finalement : $f(x) \underset{0_+}{\sim} -\ln(x)$.

   Indication : remarquer que pour x strictement positif, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t}\, dt + g(x)$.

5. Dans cette question, on se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(1)$.

   On introduit la fonction h définie sur $[0,1]$ par la relation : $\forall t \in [0,1], \quad h(t) = \frac{e^t}{1+t}$.

   On définit également deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

a. Vérifier que la fonction h est croissante sur le segment $[0,1]$.

b. Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n.

c. Montrer que : $\forall k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$, $\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

d. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}$.

e. Déterminer une valeur explicite de n, notée n_0, telle que $\frac{u_{n_0} + v_{n_0}}{2}$ soit une valeur approchée de $f(1)$ à $\frac{10^{-2}}{2}$ près.

En déduire une valeur décimale approchée de $f(1)$ à 10^{-2} près de la forme $\frac{p}{100}$, où p désigne un entier naturel. On expliquera la démarche utilisée.

Exercice 3

Dans cet exercice, la notation $\lim\limits_{x \to 1_-} g(x)$ employée à la question 3.b. signifie « limite de la fonction g lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ».

1. Montrer que les trois séries entières $\sum\limits_{n \geq 1} x^n$, $\sum\limits_{n \geq 1} \sqrt{n}\, x^n$ et $\sum\limits_{n \geq 1} n\, x^n$ ont chacune un rayon de convergence égal à 1.

   On pose alors : $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n$, $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, x^n$.

   On sera attentif au fait que les trois sommes ci-dessus sont indexées à partir de $n = 1$.

2. Dans cette question, x désigne un élément quelconque de l'intervalle $]-1,1[$.
   Rappeler sans démonstration une expression simple de $f(x)$ et en déduire une expression simple de $h(x)$ en citant précisément le théorème de cours utilisé.

3.

   a. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1[$.

b. Soit x un élément quelconque de l'intervalle $[0,1[$.

Minorer $g(x)$ et en déduire : $\lim\limits_{x \to 1_-} g(x) = +\infty$.

c. Donner l'allure de la courbe représentative de la restriction de la fonction g à l'intervalle $[0,1[$.

On précisera en particulier la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4.

a. Montrer qu'il existe un unique réel α possédant les deux propriétés suivantes :

α est élément de l'intervalle $[0,1[$ et $g(\alpha) = 2$.

b. Calculer $h(0,5)$ et en déduire : $\alpha \geq 0,5$.

c. A l'aide de votre calculatrice, déterminer explicitement le plus petit entier naturel non nul n_0 tel que : $\sum\limits_{n=1}^{n_0} \sqrt{n}\,(0,6)^n \geq 2$.

Que peut-on en déduire pour α ?

5.

a. Montrer que : $\forall x \in \,]-1,1[\,, \quad (1-x)\,g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n$.

b. En utilisant le critère spécial relatif aux séries alternées, montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ est convergente.

c. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ n'est pas absolument convergente et déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n$.

d. Montrer enfin que la fonction g possède une limite finie lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures. On citera très précisément le théorème utilisé.

Fin de l'énoncé