EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe :

$$\varphi(P) = (X+2)\,P - X\,P\big(X+1\big).$$

Par exemple, on a $\varphi(X) = (X+2)X - X(X+1) = X$.

1. Vérifier que $\varphi(X^3) = -X - 3X^2 - X^3$ et $\varphi(1) = 2$.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
4. En déduire que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Dans cette question, on considère le cas $n = 3$.
   On note M la matrice de l'endomorphisme φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et Q le polynôme caractéristique de φ, c'est-à-dire $Q(X) = \det(M - XI_3)$ où I_3 désigne la matrice unité carrée d'ordre 3.
   (a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer le polynôme caractéristique Q.
   (c) Quelles sont les valeurs propres de φ ?
   (d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
   (e) Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Fin de l'exercice

PROBLÈME

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Notations

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices rectangulaires à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
En particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On identifie un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On note ${}^t M$ la transposée de la matrice M.

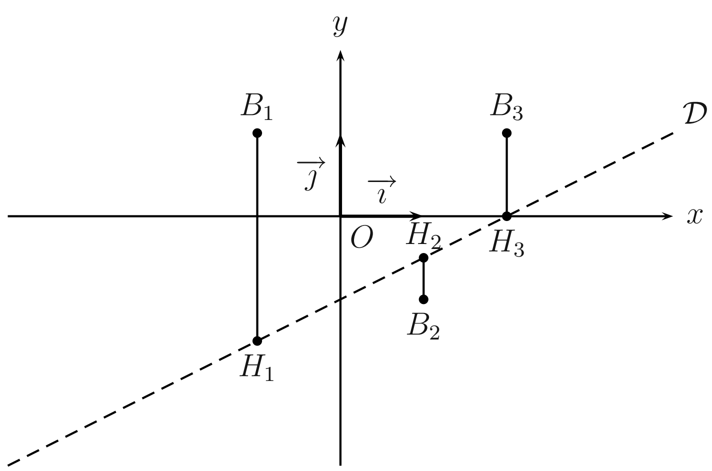
Partie I : un exemple numérique

On munit le plan euclidien $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x, y)$ désigne un point M du plan euclidien $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans ce repère.
Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère trois points $B_1(-1, 1)$, $B_2(1, -1)$ et $B_3(2, 1)$.
Pour $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$.
Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on considère le point H_i appartenant à la droite $\mathcal{D}$ de même abscisse que le point B_i.
On définit la fonction δ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\delta(m, p) = (B_1H_1)^2 + (B_2H_2)^2 + (B_3H_3)^2$$

où B_iH_i désigne la distance du point B_i au point H_i.

Le but du problème est de chercher le minimum de la fonction δ.
Si (m, p) est un couple où le minimum de la fonction δ est atteint alors la droite $y = mx + p$ s'appelle la droite de régression linéaire de y en x associée au nuage de points (B_i).



Tournez la page S.V.P.

1. Établir que pour $i \in \{1,2,3\}$,

   si B_i est le point de coordonnées (x_i, y_i), alors : $(B_iH_i)^2 = (y_i - mx_i - p)^2$.

Soit $(m,p) \in \mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $\delta(m,p) = 6m^2 + 3p^2 + 4mp - 2p + 3$.

On considère q, la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$q(\alpha, \beta) = 6\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\alpha\beta.$$

On note S la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et U le vecteur colonne $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$.

3. Exprimer $q(m,p)$ en fonction de S, U et ${}^tU$ la transposée de U.
4. Déterminer les valeurs propres de S ; on les notera, dans la suite, λ et μ, avec $\lambda < \mu$.
5. Comment peut-on vérifier ce résultat à l'aide des quantités $\lambda + \mu$ et $\lambda \times \mu$?
6. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, notée P, que l'on ne cherchera pas à déterminer, telle que $S = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^tP$.
7. En déduire que si on pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ alors, $q(m,p) = \lambda X^2 + \mu Y^2$.
8. Déterminer une base des sous-espaces propres de S. On détaillera les calculs.
9. En déduire une matrice orthogonale $P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ avec $a_{1,1} > 0$ et $a_{1,2} > 0$, telle que $S = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^tP$.
10. Montrer que l'on a :
$$\begin{cases} m &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \\ p &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2X + Y) \end{cases}.$$
11. Montrer que :
$$\delta(m,p) = \lambda\left(X + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \mu\left(Y - \frac{1}{7\sqrt{5}}\right)^2 + K$$
    avec K une constante à déterminer.
12. Montrer que la fonction δ admet un minimum égal à K.
13. Montrer que le minimum de la fonction δ est atteint au point $(m_0, p_0) = \left(-\dfrac{1}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$.
14. Représenter dans le plan les trois points B_1, B_2 et B_3 ainsi que la droite de régression linéaire.

Partie II : distance en dimension 3

Dans cette partie, on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$,

$$(X \mid Y) = {}^tXY = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

La norme du vecteur X est $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A, c'est-à-dire que f est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est A.

1. (a) Justifier que la famille $\mathcal{B} = (C_1, C_2)$, où C_1 et C_2 désignent les deux vecteurs colonnes de la matrice A est une base de $\mathrm{Im}f$. Montrer que le rang de f est égal à 2. Que vaut $\dim(\mathrm{Ker}f)$? On pourra utiliser le théorème du rang.
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathrm{Im}f$.
   (c) f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
   (d) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathrm{Im}f$ en appliquant la méthode de Schmidt à la base $\mathcal{B}$.

On rappelle que si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de la base orthornormée $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$, le projeté orthogonal $\overrightarrow{z}$ du vecteur $\overrightarrow{x}$ sur le sous-espace vectoriel F est donné par la formule :

$$\overrightarrow{z} = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{u_1}).\overrightarrow{u_1} + (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{u_2}$$

2. (a) On définit les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \dfrac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\mathcal{B}'' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathrm{Im}f$ et que cette base est orthonormée.

(b) Montrer que Z_0, le projeté orthogonal du vecteur Y_0 sur $\mathrm{Im} f$, est égal à $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On détaillera les calculs.

On pourra utiliser la formule rappelée au 1.d ainsi que la base orthonormée $\mathcal{B}''$.

(c) Déterminer un antécédent X_0 du vecteur Z_0 par f, c'est-à-dire un vecteur X_0 de $\mathbb{R}^2$ tel que $Z_0 = f(X_0)$. Cet antécédent est-il unique ?

On rappelle que si $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la distance entre $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ est définie par :

$$\mathrm{d}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|.$$

Si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, la distance de $\overrightarrow{x}$ à F est définie par :

$$\mathrm{d}(\overrightarrow{x}, F) = \inf\left\{\mathrm{d}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \,/\, \overrightarrow{y} \in F\right\} = \inf\left\{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| \,/\, \overrightarrow{y} \in F\right\}.$$

On rappelle le résultat suivant : $\mathrm{d}(\overrightarrow{x}, F) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}\|$ où $\overrightarrow{z}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{x}$ sur F.

3. (a) Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$. Calculer $AX - Y_0$ et en déduire que :

$$\delta(m, p) = \|AX - Y_0\|^2.$$

(b) Montrer que $\inf\left\{\delta(m, p) \,/\, (m, p) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{d}(Y_0, Z_0)^2$.

(c) Retrouver l'équation de la droite de régression linéaire $\mathcal{D}$ de la partie I.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1250 – D'après documents fournis