EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $F\,:\,x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, ainsi que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, appelée intégrale de Gauss.

Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.

L'ensemble des nombres réels sera noté $\mathbf{R}$.

Partie I : existence de F et de I

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par, pour tout x de $[0,+\infty[$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. a. Donner le tableau de variations de f. On fera figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
1. b. Tracer la courbe représentative de f. On précisera la demi-tangente en (0,1) et l'asymptote.

2. Démontrer que F est définie et de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et donner sa dérivée. On citera précisément le théorème utilisé.

3. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Partie II : calcul de I : première méthode

On pose, pour tout x de $[0, +\infty[$, $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que G est bien définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On pourra montrer que pour tout réel a strictement positif, la restriction de G à l'intervalle $[0, a]$ est de classe C^1.
Donner l'expression de $G'(x)$.

2. a. Montrer que la fonction $H = F^2 + G$ est constante. On pourra faire un changement de variable linéaire dans l'une des intégrales apparaissant dans la dérivée de H.

2. b. Calculer cette constante en considérant $x = 0$.

3. a. Montrer que, pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times[0, 1]$: $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

3. b. Déduire de ce qui précède que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Étudier les variations de F sur $[0, +\infty[$. Tracer sa courbe représentative en précisant la demi-tangente en (0,0) et l'asymptote.

Partie III : calcul de I : deuxième méthode

1. Si R est un réel strictement positif, on note $D(R) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+,\ x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$.
On pose : $J(R) = \displaystyle\iint_{D(R)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, montrer que :

$$J(R) = \frac{\pi}{4}\,(1 - \mathrm{e}^{-R^2}) .$$

2. Si R est un réel strictement positif, on note $\Gamma(R)$ le carré $[0, R] \times [0, R]$.
Exprimer $K(R) = \displaystyle\iint_{\Gamma(R)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en fonction de $F(R)$.

3. a. Représenter les trois ensembles $D(R)$, $\Gamma(R)$ et $D(\sqrt{2}\,R)$ sur un même croquis.

3. b. Montrer que pour tout R strictement positif : $J(R) \leqslant K(R) \leqslant J(\sqrt{2}\,R)$.

4. En déduire que $K(R)$ admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$ et la déterminer.

5. Retrouver, grâce à ce qui précède, la valeur de I.

Partie IV : développements en séries entières

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par, pour tout x de $\mathbf{R}$, $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}\, F(x)$.

Dans cette partie, on désire étudier le développement en série entière des fonctions F et g.

1. a. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière sur $\mathbf{R}$ de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$.

1. b. En déduire que la fonction notée encore $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, et donner son développement.

2. a. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbf{R}$. On citera précisément le théorème utilisé.

2. b. Donner le développement en série entière de F sur $\mathbf{R}$.

3. On s'intéresse maintenant à la fonction g définie au début de cette partie.

On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' - 2xy = 1$.

On désire déterminer les solutions de (E) développables en série entière et s'annulant en 0, puis en déduire que g est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

3. a. Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée y. En supposant que y est solution de (E) sur l'intervalle $]-R, R[$ et que $a_0 = 0$, montrer que $a_1 = 1$ et que, pour tout $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}\, a_{n-1}$.

3. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}\, n!}{(2n+1)!}$.

3. c. Réciproquement, on considère la série entière $\sum \dfrac{2^{2n}\, n!}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$. Calculer son rayon de convergence. En déduire que sa somme est solution de (E) sur $\mathbf{R}$ et s'annule en 0.

3. d. Montrer que g est solution de l'équation (E) sur $\mathbf{R}$ et s'annule en 0.

3. e. Déduire de ce qui précède que g est développable en série entière sur $\mathbf{R}$. Donner son développement. On citera précisément le théorème utilisé.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1251 – D'après documents fournis