Jean-Marie DELORME jean-marie.delorme@fnac.net
François-Xavier COQ francois.coq@ac-orleans-tours.fr
Lycée POTHIER ORLEANS

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2002 CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP
PHYSIQUE 1

A. Thermodynamique : étude d'un climatiseur pour avion pressurisé

A.I. Bilan énergétique de la cabine.

A.I.1) λ en W.m^{-1}.K^{-1}.

A.I.2) En utilisant la résistance thermique "linéaire": $T_e - T_c = \dfrac{4\,E}{\lambda\,\pi\,D^2}\left(\Phi_{th}\right)_b$.

A.I.3) En utilisant la résistance thermique "cylindrique" (à démontrer) $T_e - T_c = \dfrac{\ln\left(\dfrac{D+2\,E}{D}\right)}{2\,\pi\,\lambda\,L}\left(\Phi_{th}\right)_c$.

Remarque: comme $E \ll D$, on pourrait prendre la valeur approchée en utilisant la résistance "linéaire":

$T_e - T_c = \dfrac{E}{\lambda\,\pi\,L\,D}\left(\Phi_{th}\right)_c$.

A.I.4) $(\Phi_{th})_t = 2\,(\Phi_{th})_b + (\Phi_{th})_c$, d'où l'expression de la conductance thermique:

$a = \lambda\left(\dfrac{\pi\,D^2}{2\,E} + \dfrac{2\,\pi\,L}{\ln\left(\dfrac{D+2\,E}{D}\right)}\right)$, soit $a = 520$ W.K^{-1}.

A.I.5) Bilan en régime stationnaire: $P_t = -\,N_p\,P_P - (\Phi_{th})_t$.

En haute altitude: $(P_t)_{altitude} = 29{,}3$ kW (> 0 car il faut réchauffer la cabine).

Au sol: $(P_t)_{sol} = -\,19{,}0$ kW (< 0 car il faut refroidir la cabine).

A.II. Travail minimum à fournir pour climatiser et pressuriser l'avion.

A.II.1) Pendant Δt, il entre $n = d_n\,\Delta t$ moles d'air, et $Q_2 = P_t\,\Delta t$, soit: $Q_2 = P_t\,\dfrac{n}{d_n}$.

A.II.2) $n = d_p\,\dfrac{1}{V}\,N_p$; $d_n = d_p\,N_p\,\dfrac{p_c}{R\,T_c}$; $d_n = 28{,}7$ mol.s^{-1}.

A.II.3)a) $\delta W = -\,p_{ext}\,\mathrm{d}V_{syst}$, d'où: $W_{pe} = p_e\,V_e$.

b) $W_{pc} = -\,p_c\,V_c$.

c) $\Delta U = W + Q = W_u + W_p + Q_1 + Q_2 = p_e\,V_e - p_c\,V_c + W_u + Q_1 + Q_2$. Or $H = U + p\,V$, donc:

$\Delta H = W_u + Q_1 + Q_2$.

A.II.4)a) $c_p - c_v = R$ et $\dfrac{c_p}{c_v} = \gamma$ donnent: $c_v = \dfrac{R}{\gamma - 1}$ et $c_p = \dfrac{\gamma\,R}{\gamma - 1}$.

b) Pour un gaz décrit par le modèle du gaz parfait: $\mathrm{d}H = n\, c_p\, \mathrm{d}T$ donc: $\Delta H = n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}(T_c - T_e)$.

c) $Q_1 + Q_2 + W_u = \Delta H = n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}(T_c - T_e)$.

A.II.5)a) $\mathrm{d}U = \delta W_{rév} + \delta Q_{\text{rév}} = - p\, \mathrm{d}V + T\, \mathrm{d}S$, donc $\mathrm{d}H = V\, \mathrm{d}p + T\, \mathrm{d}S$, ce qui donne:

$\mathrm{d}S = n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{\mathrm{d}T}{T} - n\, R\, \dfrac{\mathrm{d}p}{p} = \mathrm{d}\left(n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\ln(T) - n\, R\ln(p)\right)$, d'où:

$S(T,p) = n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\ln(T) - n\, R\ln(p) + \text{cste}$, donc $\alpha = n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}$ et $\beta = - n\, R$.

b) $\mathrm{d}S = \delta_{\text{éch}}S + \delta_{\text{créé}}S$, avec: $\delta_{\text{éch}}S = \sum \dfrac{\delta Q}{T_i}$. Pendant Δt, $S_{éch} = \dfrac{Q_2}{T_c} + \dfrac{Q_1}{T_e}$, donc:

$\Delta S = \dfrac{Q_2}{T_c} + \dfrac{Q_1}{T_e} + S_{\text{créé}}$.

c) $S_{\text{créé}} \geq 0$, donc: $\Delta S \geq \dfrac{Q_2}{T_c} + \dfrac{Q_1}{T_e}$, avec $\Delta S = n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\dfrac{T_c}{T_e}\right) - n\, R\ln\left(\dfrac{p_c}{p_e}\right)$, d'où:

$n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\dfrac{T_c}{T_e}\right) - n\, R\ln\left(\dfrac{p_c}{p_e}\right) \geq \dfrac{Q_2}{T_c} + \dfrac{Q_1}{T_e}$.

A.II.6) $W_u = n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}(T_c - T_e) - Q_1 - Q_2$, donc:

$W_u \geq n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}(T_c - T_e) - T_e\left[n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\dfrac{T_c}{T_e}\right) - n\, R\ln\left(\dfrac{p_c}{p_e}\right) - \dfrac{Q_2}{T_c}\right] - Q_2$.

De plus: $P_u = \dfrac{W_u}{\Delta t}$, $n = d_n\, \Delta t$ et $P_t = \dfrac{Q_2}{\Delta t}$, donc:

$P_u \geq d_n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\left[T_c - T_e - T_e\ln\left(\dfrac{T_c}{T_e}\right)\right] + d_n\, R\, T_e\ln\left(\dfrac{p_c}{p_e}\right) + P_t\left(\dfrac{T_e}{T_c} - 1\right)$.

A.II.7) $(P_u)_{\text{altitude}} \geq 70{,}2$ kW; $(P_u)_{\text{sol}} \geq - 0{,}14$ kW (il n'y a pas besoin des sources d'énergie de l'avion dans ce dernier cas).

A.III. Machine utilisée

A.III.1) $P_t = d_n\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}(T_a - T_c)$, donc: $T_a = T_c - \dfrac{a}{d_n\, c_p}(T_e - T_c)$.

A.III.2)a) $\Delta H = Q + W_u$ avec $Q = 0$ (adiabatique), donc: $W_u = n_i\, R\, \dfrac{\gamma}{\gamma-1}(T_f - T_i)$.

b) La transformation est adiabatique, réversible, le gaz est décrit par le modèle du gaz parfait et γ est supposé constant, on peut utiliser la loi de Laplace: $\dfrac{p_f}{p_i} = \left(\dfrac{T_f}{T_i}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

c) Pour le compresseur: $\dfrac{p_1}{p_e} = \left(\dfrac{T_1}{T_e}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Pour la turbine: $\dfrac{p_c}{p_1} = \left(\dfrac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Donc: $\dfrac{p_c}{p_e} = \left(\dfrac{T_1}{T_e}\dfrac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

d) Dans la vanne de détente: $W_u = 0$, donc $T_4 = T_1$. Si la transformation était réversible, on aurait: $\frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1$, ce qui n'est pas le cas, donc la transformation ne peut pas être réversible.

A.III.3)a) Si $T_e > T_1$, l'échange thermique se fera de l'extérieur vers le fluide, donc $T_2 > T_1$ et $T_2 < T_e$ donc $1 < \frac{T_2}{T_1} < \frac{T_e}{T_1}$.

Si $T_e < T_1$, l'échange thermique se fera du fluide vers l'extérieur, donc $T_2 < T_1$ et $T_2 > T_e$ donc. $\frac{T_e}{T_1} < \frac{T_2}{T_1} < 1$.

Dans les deux cas: $0 < e < 1$, on peut rajouter les cas $T_1 = T_e$, $T_e = T_2$, $T_1 = T_2$ pour les cas limites, ce qui donne: $0 \le e \le 1$.

b) $T_2 = T_1 + e\,(T_e - T_1)$.

A.III.4)a) Le système $\mathbf{S_1}$+$\mathbf{S_2}$ étant isolé: $0 = \Delta H = n_1\, c_p\, (T_a - T_3) + n_2\, c_p\, (T_a - T_4)$, donc: $T_a = \frac{n_1\, T_3 + n_2\, T_4}{n_1 + n_2}$.

b) $x_1 = \frac{n_1}{n}$ donne: $T_3 = \frac{T_a - (1 - x_1)\, T_1}{x_1}$ car $T_4 = T_1$.

A.III.5)a) Le III.1) donne, avec $d_n = 28{,}74$ mol.s^{-1}: $T_a = 282{,}3$ K, $A = 0{,}92$,….

b) Le III.2.c donne, au sol où $p_c = p_e$: $\frac{T_1}{T_e} = \frac{T_2}{T_3}$, donc: $X = \frac{x_1\left[X + e\,(1 - X)\right]}{A - (1 - x_1)\, X}$.

c) $n_2 = 0$ est le plus économique, car la transformation non isentropique se fait pour les n_2 moles dans la vanne de détente.

d) Si $x_1 = 1$: $X = \frac{X + e\,(1 - X)}{A}$, d'où $e = e_{\max} = \frac{X\,(A - 1)}{1 - X}$.

e) On prend $e_{\max} = 0{,}7$ (?), on déduit $X = 1{,}14$, puis $T_1 = 350$ K (349,6), $T_2 = 321$ K (320,5).

Compresseur: $P_{cu} = x_1\, d_n\, R\, \frac{\gamma}{\gamma - 1}\, (T_1 - T_e) = 0{,}852$ kW.

Turbine: $P_{tu} = x_1\, d_n\, R\, \frac{\gamma}{\gamma - 1}\, (T_3 - T_2) = -\ 2{,}605$ kW.

La puissance à fournir à **S** est alors: $P_u = P_{cu} + P_{tu} = -\ 1{,}753$ kW < 0 : le système fonctionne sans apport extérieur ?

B. Mécanique : étude d'un horizon artificiel

B.I. Verticale apparente dans un avion en virage

B.I.1) Dans $\mathbf{R_a}$, l'avion est soumis aux forces: $\mathbf{R_a}$ (aérodynamiques), **T** (exercé par le moteur), M **g** (poids) et la force d'inertie d'entraînement $M\, \frac{V^2}{R}\, \mathbf{u}$.

B.I.2) Dans ce référentiel, l'avion est immobile: $\mathbf{0} = \mathbf{R_a} + \mathbf{T} + M\,\mathbf{g} + M\, \frac{V^2}{R}\, \mathbf{u}$.

B.I.3) La projection sur Cy_a donne: $g \sin\theta = \dfrac{V^2}{R}\cos\theta$.

B.I.4)a) $\mathbf{F_{ie}} = m\dfrac{V^2}{R}\,\mathbf{u}$.

b) Le poids apparent est la somme du poids et de la force d'inertie d'entraînement: $\mathbf{P_a} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{F_{ie}}$. La composante perpendiculaire à Cz_a vaut (selon Cy_a): $P_{ay} = m\,g\sin\theta - m\dfrac{V^2}{R}\cos\theta = 0$. Donc $\mathbf{P_a}$ est colinéaire à Cz_a qui est la direction sol-plafond. Donc le pilote ressent toujours un poids apparent dirigé vers le sol qu'il considère être le "bas": il ne ressent pas les changements de direction.

c) La composante selon Cz_a est $P_{az} = m\,g\cos\theta + m\dfrac{V^2}{R}\sin\theta$, avec $\dfrac{V^2}{R} = g\tan\theta$, donc: $P_{az} = m\,g\dfrac{1}{\cos\theta}$.

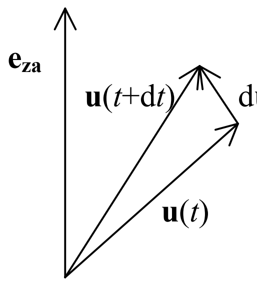
Donc: $\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{1}{\cos\theta} - 1 = 0{,}15 = 15\ \%$. S'il y a des turbulences donnant des accélérations aléatoires de l'ordre de 20 % de g, le pilote ne ressent pas les variations de P_a.

B.II. Approximation gyroscopique

B.II.1) I s'exprime en kg.m^2.

B.II.2)a) $L = I\,\Omega$.

b) $\dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ et $\mathbf{L} = L\,\mathbf{u}$, donc: $\left(\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{R_{CM}} = \dfrac{\mathbf{M}}{L}$.



B.III. Système érecteur

B.III.1)a) $L\,\mathrm{d}\mathbf{u} = \mathbf{M}\,\mathrm{d}t$ et d'après le schéma ci-contre $\mathbf{M}$ doit être perpendiculaire à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{u} \wedge \mathbf{e_{za}}$.

b) Le vecteur proposé est bien perpendiculaire à $\mathbf{u}$ ($\mathbf{M.u} = \mathbf{0}$), et à $\mathbf{u} \wedge \mathbf{e_{za}}$ ($\mathbf{M.(u \wedge e_{za})} = \mathbf{0}$),.

τ s'exprime en secondes.

B.III.2)a) La projection selon $\mathbf{e_{za}}$ donne: $\tau\dfrac{d}{dt}(\cos\beta) = 1 - \cos^2\beta$ ou $\dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}\sin\beta$.

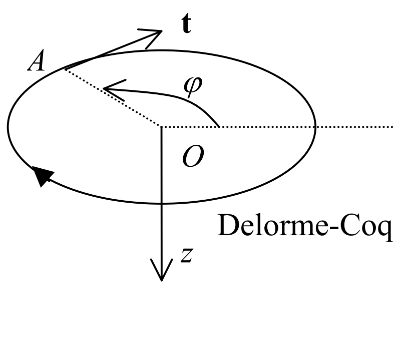
B.III.2)b) Cette équation s'écrit: $\dfrac{d\cos\beta}{1-\cos^2\beta} = \dfrac{dt}{\tau}$, on pose $v = \cos\beta$, donc: $\dfrac{dt}{\tau} = \dfrac{dv}{1-v^2} = \dfrac{dv}{2}\left[\dfrac{1}{1-v} + \dfrac{1}{1+v}\right]$, qui s'intègre en $\dfrac{t}{\tau} + cste = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+v}{1-v}\right) = \ldots = -\ln(\tan(\beta/2))$, d'où: $\tan(\beta/2) = \tan(\beta_0/2)\exp(-t/\tau)$.

Rq: pour avoir un "bon" système, il faut τ "petit".

B.IV. Comportement de l'horizon artificiel en virage

B.IV.1) $\mathbf{v}(A) = -\dot\varphi\,R\,\mathbf{t} = -\dot\varphi\,\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{OA}$, donc $\boldsymbol{\Omega}_a = -\dot\varphi\,\mathbf{e}_z$.

$\Omega_a = -d\varphi/dt$ (0,5 tr/min), $\tau = 360$ s, d'où: $\Omega_a\,\tau = 18{,}85$ rad $= 6\,\pi°$.



B.IV.2) R_{CM} est en translation par rapport à R, donc:

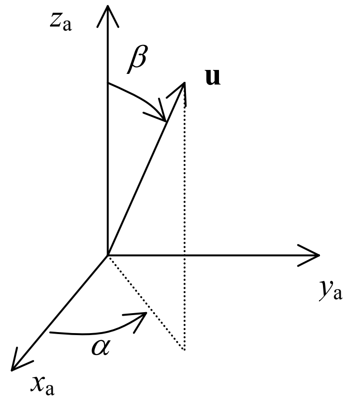
$\mathbf{\Omega}_{\mathbf{Ra/RCM}} = \mathbf{\Omega}_{\mathbf{Ra/R}} + \mathbf{\Omega}_{\mathbf{R/RCM}} = \mathbf{\Omega}_{\mathbf{a}} + \mathbf{0} = \mathbf{\Omega}_{\mathbf{a}}$.

B.IV.3) $\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{R_a} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{R_{CM}} + \mathbf{\Omega}_{R_{CM}/R_a} \wedge \mathbf{u} = \frac{\mathbf{M}}{L} - \Omega_a \wedge \mathbf{u}$.

B.IV.4)a) Si **u** est fixe dans R_a, $\mathbf{M} = L\,\mathbf{\Omega}_a \wedge \mathbf{u} = L\,\Omega_a\,\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u}$ et $\mathbf{M} = \frac{L}{\tau}\,[\mathbf{e}_{za} - (\mathbf{u}.\mathbf{e}_{za})\,\mathbf{u}]$.

Or $\mathbf{e}_z = \cos\theta\,\mathbf{e}_{za} + \sin\theta\,\mathbf{e}_{ya}$, et

$\mathbf{u} = \cos\beta\,\mathbf{e}_{za} + \sin\beta\,(\cos\alpha\,\mathbf{e}_{xa} + \sin\alpha\,\mathbf{e}_{ya})$.



Donc:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \cos\beta \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} = \Omega_a\,\tau \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} \right)$$

$$= \Omega_a\,\tau \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta\sin\alpha \\ \cos\theta\sin\beta\cos\alpha \\ -\sin\theta\sin\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Selon $\mathbf{e}_{ya}$: $-\cos\beta\sin\alpha = \Omega_a\,\tau\cos\theta\cos\alpha$ (1).

Selon $\mathbf{e}_{za}$: $\sin\beta = -\Omega_a\,\tau\sin\theta\cos\alpha$ (2).

b) (2) donne: $\cos\alpha = -\frac{\sin\beta}{\Omega_a\,\tau\sin\theta}$, en reportant dans (1): $\sin\alpha = \frac{\sin\beta\cos\theta}{\cos\beta\sin\theta} = \frac{\tan\beta}{\tan\theta}$.

c) $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \ldots = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\Omega_a^{\,2}\,\tau^2} + \frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin^2\beta}\right)$.

d) $\Omega_a^{\,2}\,\tau^2 \gg 1$, donc: $1 \approx \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}\frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin^2\beta}$, ce qui donne $\sin^2\beta \approx \sin^2\theta$, donc $\sin\theta \approx \sin\beta$ car β et θ sont du même signe.

e) $\mathbf{u} - \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha - \sin\theta \\ \cos\beta - \cos\theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\theta\,(\sin\alpha - 1) \\ 0 \end{pmatrix}$.

De plus $\sin\alpha = \frac{\tan\beta}{\tan\theta} \approx 1$, donc: $\mathbf{u} - \mathbf{e}_z \approx \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K\,\mathbf{e}_{xa}$.

Le carré de la norme donne: $K^2 = 2 - 2\cos(\mathbf{u},\mathbf{e}_z)$. On note γ l'angle entre **u** et $\mathbf{e}_z$.

Or $\mathbf{u}.(\mathbf{u} - \mathbf{e}_z) = K\,\mathbf{e}_{xa}.\mathbf{u} = K\sin\beta\cos\alpha$, donc: $1 - \cos\gamma = K\sin\beta\cos\alpha$.

On élève au carré,…: $1 - \cos\gamma \approx 2\sin^2\theta\cos^2\alpha$, avec $\cos^2\alpha \approx \frac{1}{\Omega_a^{\,2}\,\tau^2}$.

AN: $1 - \cos\gamma \approx 1{,}41.10^{-3}$, d'où $\gamma \approx 3$ °.
Si le pilote est sensible à une déviation de 1 °, il ressentira cet écart.