

CORRECTION CCP MP 2002 : PHYSIQUE II

A. Etude d'une bobine à champ pulsé et de son alimentation

Partie I : Alimentation pour bobine à champ pulsé

1°) A l'instant initial la diode est bloquée donc le condensateur se décharge dans la bobine (et ceci tant que la diode reste bloquée, c'est à dire tant que $V_A - V_B > 0$). On a donc un circuit RLC série :

$$V_C = \frac{q}{C} = V_L = RI_L + L \frac{dI_L}{dt}$$

D'après les orientations de I_L et V_C on a $I_L = -\frac{dq}{dt}$, on obtient donc l'équation différentielle suivante :

$$L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + R \frac{dI_L}{dt} + \frac{I_L}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = 0$$

On a $\Delta' = \alpha^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (\alpha^2 - 1) < 0$ d'où : $I_L(t) = Ae^{-\alpha\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t + \varphi)$

Les conditions initiales sont : $I_L(0) = 0$ (continuité aux bornes de la bobine)

et $\frac{dI_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L}$ (continuité de la tension aux bornes du

condensateur, la loi des mailles donne $V_0 = RI_L(0) + L \frac{dI_L}{dt}(0)$)

$$\text{On en déduit } \begin{cases} A \sin \varphi = 0 \\ -\alpha\omega_0 A \sin \varphi + \omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} A \cos \varphi = \frac{V_0}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \frac{V_0}{L\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha V_0}{R\sqrt{1-\alpha^2}} \end{cases}$$

D'où :

$$I_L(t) = \frac{2\alpha V_0}{R\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\alpha\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t)$$

$V_C = RI_L(t) + L \frac{dI_L}{dt}(t)$ d'où :

$$V_C(t) = R \frac{2\alpha V_0 e^{-\alpha\omega_0 t}}{R\sqrt{1-\alpha^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) + L \frac{2\alpha V_0 e^{-\alpha\omega_0 t}}{R\sqrt{1-\alpha^2}} \left(-\alpha\omega_0 \sin(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) + \omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) \right)$$

Ce qui donne après simplification :

$$V_C(t) = V_0 e^{-\alpha\omega_0 t} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) + \cos(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) \right)$$

$$2^\circ) \frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow -\alpha\omega_0 \sin(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) + \omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) = 0$$

$$\tan(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \Rightarrow t = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) + p\pi \right) \quad p \in \mathbb{Z}$$

Le premier maximum est obtenu pour $p=1$

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)$$

A.N. : $\tau_1 = 5,27 \cdot 10^{-2} \text{s}$

$$I_{Lm} = I_L(\tau_1) = \frac{2\alpha V_0}{R\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)\right) \sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)\right) \quad \underline{\text{A.N.}} : I_{Lm}=6,41 \cdot 10^3 \text{ A}$$

3°) Pour trouver τ_2 on résout $V_C = RI_L(t) + L \frac{dI_L}{dt}(t) = 0$

$$\Rightarrow \alpha \sin(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) + \sqrt{1-\alpha^2} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) = 0 \quad (\text{cf question I.1°})$$

$$\Rightarrow \tan(\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2} t) = -\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \Rightarrow t = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) + p\pi \right)$$

V_C s'annule la première fois pour $p=1$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) + \pi \right) \quad \underline{\text{A.N.}} : \tau_2 = 7,95 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

$$I_L(\tau_2) = \frac{2\alpha V_0}{R\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) + \pi \right)\right) \sin\left(\left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right) + \pi \right)\right)$$

$$\underline{\text{A.N.}} : I_L(\tau_2) = 5,20 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

4°) Pour $t > \tau_2$ la diode D (idéale) est débloquée. Le condensateur est donc court-circuité et la bobine se décharge dans la résistance :

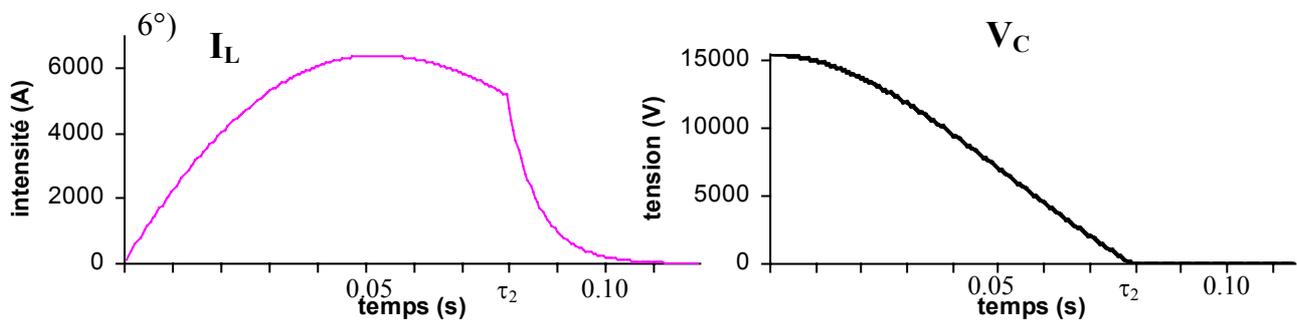
$$RI_L + L \frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow I_L(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

On détermine K par continuité du courant aux bornes de L en $t = \tau_2 \Rightarrow I_L(\tau_2) = K \exp\left(-\frac{\tau_2}{\tau}\right)$

d'où :

$$I_L(t) = I_L(\tau_2) \exp\left(-\frac{(t-\tau_2)}{\tau}\right) \quad \text{pour } t > \tau_2, \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

$$5°) I_L(\tau_3) = I_L(\tau_2) \exp\left(-\frac{(\tau_3 - \tau_2)}{\tau}\right) = \frac{I_L(\tau_2)}{10} \Rightarrow \tau_3 = \tau_2 + \tau \ln(10) \quad \underline{\text{A.N.}} : \tau_3 = 0,227 \text{ s}$$



$$7°) \varepsilon_e = \frac{1}{2} CV_0^2 \quad \underline{\text{A.N.}} : \varepsilon_e = 3,00 \cdot 10^6 \text{ J} = 3 \text{ MJ} !$$

8°) Pour $t \gg \tau_2$ $I_L(t)$ tend vers 0, donc il n'y a pas d'énergie stockée dans la bobine, de plus $V_C = 0$, donc toute l'énergie initialement stockée dans le condensateur a été dissipée par effet Joule.

Partie II : Bobine pour champ magnétique intense pulsé

1°) Pour une surface $dS = r dr dz$ du plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) située entre R_1 et R_2 on a la relation suivante : $J dS = I_{dS}$, or le nombre de spires enlacées par le contour de cette surface est $ndz \cdot mdr$ donc $I_{dS} = nmI dr dz$.

On a donc $J dr dz = nmI dr dz \Rightarrow J = nmI$

De plus les spires sont supposées circulaires d'axe \vec{e}_z , donc J est orthoradial :

$$\vec{J} = nmI \vec{e}_\theta$$

2°) Tout plan perpendiculaire à \vec{e}_z est un plan de symétrie (puisqu'on considère le solénoïde comme infiniment long) donc $\vec{B} = B \vec{e}_z$

Il y a invariance par rotation autour de \vec{e}_z et par translation le long de \vec{e}_z donc $B(r, \theta, z) = B(r)$, d'où :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$$

3°) On sait qu'à l'extérieur d'un solénoïde infini le champ magnétique est nul donc, par superposition on a $\vec{B} = \vec{0}$ pour $r > R_2$.

Pour $R_1 < r < R_2$ on applique le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire dans le plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) , compris entre r et R_2^+ , et entre z et $z+l$ (l'orientation du courant n'étant pas précisée, on suppose que I est positif s'il tourne positivement autour de \vec{e}_z , et on oriente le contour tel

$$\begin{aligned} \text{que } \vec{S}_{\text{contour}} \text{ est suivant } \vec{e}_\theta) : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I_{\text{enlacé}} \Rightarrow \int_z^{z+l} \vec{B}(r) \cdot dz \vec{e}_z + 0 + \int_{R_2^+}^r \vec{B}(R_2^+) \cdot dz \vec{e}_z + 0 = \mu_0 \int_r^{R_2} J dr \\ &\Rightarrow B(r)l = \mu_0 J (R_2 - r)l \quad \text{car } B(R_2^+) = 0 \\ &\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 nmI (R_2 - r) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Pour $r < R_1$, en appliquant le théorème d'Ampère sur un contour identique compris entre r et R_1^- , on montre que \vec{B} est uniforme à l'intérieur du solénoïde. Comme il n'y a pas de courant surfacique en R_1 , il y a continuité de \vec{B} .

Conclusion :	Pour $r < R_1$	$\vec{B} = \mu_0 nmI (R_2 - R_1) \vec{e}_z$
	Pour $R_1 < r < R_2$	$\vec{B} = \mu_0 nmI (R_2 - r) \vec{e}_z$
	Pour $R_2 < r$	$\vec{B} = 0$

4°) L'expression de la force de Laplace volumique est : $d^3\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} d\tau$

$$d^3\vec{F} = nmI \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z r d\theta dr dz \Rightarrow d^3\vec{F} = \mu_0 (nmI)^2 (R_2 - r) r d\theta dr dz \vec{e}_r$$

$$5°) d\vec{F}_{\text{surface}} = \int_{R_1}^{R_2} d^3\vec{F} = \int_{R_1}^{R_2} \mu_0 (nmI)^2 (R_2 - r) r d\theta dr dz \vec{e}_r = \mu_0 (nmI)^2 \left[R_2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{R_1}^{R_2} d\theta dz \vec{e}_r$$

$$d\vec{F}_{\text{surface}} = \mu_0 (nmI)^2 \left[R_2 \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \right] d\theta dz \vec{e}_r \Rightarrow d\vec{F}_{\text{surface}} = \mu_0 (nmI)^2 \left[\frac{R_2^3}{6} - \frac{R_2 R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{3} \right] d\theta dz \vec{e}_r$$

$$\text{Or on a } d\vec{F}_{\text{surface}} = p d\vec{S} \text{ avec } d\vec{S} = R_2 d\theta dz \vec{e}_r \text{ d'où : } p = \mu_0 (nmI)^2 \left[\frac{R_2^2}{6} - \frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{3R_2} \right]$$

Rem : Bien sûr par symétrie, la résultante de la force surfacique qui s'exerce sur toute la surface extérieure est nulle, mais la pression a tendance à faire éclater le solénoïde.

6°) On intègre l'énergie magnétique volumique sur une longueur l de solénoïde :

$$U_{\text{mag}} = \iiint u_B(M) d\tau = \int_0^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} B^2(r) 2\pi r l dr = \int_0^{R_1} \frac{1}{2\mu_0} [\mu_0 n m l (R_2 - R_1)]^2 2\pi r l dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} [\mu_0 n m l (R_2 - r)]^2 2\pi r l dr$$

$$U_{\text{mag}} = \pi l \mu_0 n^2 m^2 I^2 \left((R_2 - R_1)^2 \int_0^{R_1} r dr + \int_{R_1}^{R_2} (R_2 - r)^2 r dr \right) = \pi l \mu_0 n^2 m^2 I^2 \left((R_2 - R_1)^2 \frac{R_1^2}{2} + \left[\frac{1}{2} R_2^2 r^2 - \frac{2}{3} R_2 r^3 + \frac{1}{4} r^4 \right]_{R_1}^{R_2} \right)$$

$$U_{\text{mag}} = \pi l \mu_0 n^2 m^2 I^2 \left(\frac{R_2^2 R_1^2}{2} + \frac{R_1^4}{2} - R_1^3 R_2 + \frac{R_2^4}{2} - \frac{R_2^2 R_1^2}{2} - \frac{2R_2^4}{3} + \frac{2}{3} R_2 R_1^3 + \frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = \pi l \mu_0 n^2 m^2 I^2 \left(\frac{R_1^4}{4} + \frac{R_2^4}{12} - \frac{R_2 R_1^3}{3} \right)$$

Pour obtenir l'énergie par unité de longueur, on divise par l :

$$U_{\text{mag linéique}} = \pi \mu_0 n^2 m^2 I^2 \left(\frac{R_1^4}{4} + \frac{R_2^4}{12} - \frac{R_2 R_1^3}{3} \right)$$

Rem : On peut vérifier que $U_{\text{mag, linéique}}=0$ pour $R_1=R_2$ puisqu'alors il n'y a plus de courant.

7°) L'énergie magnétique linéique et l'inductance linéique sont liées par :

$$U_{\text{mag, linéique}} = \frac{1}{2} \lambda I^2 \Rightarrow \lambda = 2\pi \mu_0 n^2 m^2 \left(\frac{R_1^4}{4} + \frac{R_2^4}{12} - \frac{R_2 R_1^3}{3} \right)$$

$$8°) \text{ On a } L = l\lambda, \quad n = \frac{N}{l}, \quad m = \frac{M}{(R_2 - R_1)} \text{ d'où : } L = 2\pi \mu_0 \frac{N^2}{l} \frac{M^2}{(R_2 - R_1)^2} \left(\frac{R_1^4}{4} + \frac{R_2^4}{12} - \frac{R_2 R_1^3}{3} \right)$$

ou encore puisque $\left(\frac{R_1^4}{4} + \frac{R_2^4}{12} - \frac{1}{3} R_2 R_1^3 \right) = (R_2 - R_1)^2 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{12} + \frac{R_2 R_1}{6} \right)$:

$$L = 2\pi \mu_0 \frac{N^2}{l} M^2 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{12} + \frac{R_2 R_1}{6} \right)$$

$$9°) \quad \vec{F} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dl} \vec{e}_z = -\pi \mu_0 \frac{N^2 M^2}{l^2} \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{12} + \frac{R_2 R_1}{6} \right) I^2 \vec{e}_z \text{ c'est donc une force qui a}$$

tendance à comprimer la bobine !

$$\text{On a } p' = \frac{\|\vec{F}\|}{S} = \frac{\|\vec{F}\|}{\pi R_2^2} \Rightarrow p' = \mu_0 \frac{N^2 M^2}{l^2} \left(\frac{1}{12} + \frac{R_1}{6R_2} + \frac{R_1^2}{4R_2^2} \right) I^2 \vec{e}_z$$

$$10°) \quad L = 2\pi \mu_0 n^2 m^2 l \left(\frac{R_1^4}{4} + \frac{R_2^4}{12} - \frac{R_2 R_1^3}{3} \right) \quad \underline{\text{A.N.}} : L = 63,2 \text{ mH}$$

$$B = \mu_0 n m (R_2 - R_1) I_{\text{max}} \quad \underline{\text{A.N.}} : B = 60,3 \text{ T}$$

$$p = \mu_0 (n m l)^2 \left[\frac{R_2^2}{6} - \frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{3R_2} \right] \quad \underline{\text{A.N.}} : p = 5,96 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$p' = \mu_0 n^2 m^2 (R_2 - R_1)^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{R_1}{6R_2} + \frac{R_1^2}{4R_2^2} \right) I^2 \quad \underline{\text{A.N.}} : p' = 3,08 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

p a tendance à faire éclater la bobine radialement vers l'extérieur et p' à la comprimer dans le sens de la longueur.

La limite d'élasticité qui nous est donnée est homogène à une pression ($[N \cdot mm^{-2}] = [Force/surface]$) on supposera que c'est la limite de contrainte surfacique que peut subir le cuivre sans se rompre. Or $10^3 N \cdot mm^{-2} = 10^9 Pa > p > p'$ donc la bobine ne se casse pas !

B. Déphasage d'une onde au passage par un foyer

Partie I : Passage d'une onde sphérique par son centre

1°) Le principe d'Huygens-Fresnel comporte :

- la contribution d'Huygens (1678) : la lumière se propage de proche en proche, chaque point atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui réémet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à l'élément de surface.
- la contribution de Fresnel (1818) : l'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires ; on dit que toutes ces vibrations interfèrent pour donner la vibration au point considéré.

La vibration lumineuse en P ($\psi(P)$) est donc la somme des ondelettes émises par chaque point M. Ces ondelettes sont des ondes sphériques $\left(A \frac{\exp(ikMP)}{MP} \right)$ d'amplitude proportionnelle à la vibration incidente en M et à la surface de la source secondaire, donc $A = \psi_0(M)dS$.

$$[\psi] = [\chi] [\psi] [L^2] / [L] \Rightarrow [\chi] = [L^{-1}] \quad \chi \text{ est homogène à l'inverse d'une longueur.}$$

Le terme $1/i$ signifie que l'onde secondaire émise en M est déphasée de $-\pi/2$ par rapport à l'onde incidente arrivant en M.

2°) a) M(x,y,z) et P(0,0, ζ) donc $MP = \sqrt{x^2 + y^2 + (\zeta - z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2 + z^2 - 2z\zeta}$

Mettons ζ^2 en facteur $MP = \zeta \sqrt{1 - \frac{2z}{\zeta} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\zeta^2}}$

De plus on a $CM=R \Rightarrow R^2 = x^2 + y^2 + (R-z)^2 = x^2 + y^2 + R^2 + z^2 - 2zR$ d'où $z = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2R}$

On en déduit $MP = \zeta \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\zeta R} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\zeta^2}}$ or $z \ll x, y$ donc $MP \approx \zeta \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{\zeta R} + \frac{x^2 + y^2}{\zeta^2}}$

Le développement limité donne (puisque $x, y \ll R, \zeta$) $MP \approx \zeta \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\zeta R} + \frac{x^2 + y^2}{2\zeta^2} \right)$

D'où $MP \approx \zeta - \frac{x^2 + y^2}{2R} + \frac{x^2 + y^2}{2\zeta} \Rightarrow \boxed{MP \approx \zeta + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{R} \right)}$ donc $\alpha = 1/2$

b) $\psi(P) = \frac{\chi}{i} \int_D \psi_0(M) \frac{\exp(ikMP)}{MP} dS$ or dans cette intégrale MP apparaît à deux

endroits : dans la fonction $\frac{1}{MP}$ on peut se limiter à un développement limité du premier ordre car c'est une fonction qui varie lentement ; en revanche dans l'exponentielle complexe il faut conserver la variation en fonction de x et y, car c'est une fonction dont les valeurs changent radicalement quand MP varie seulement de l'ordre de $\lambda = 2\pi/k$.

On obtient donc : $\psi(P) = \frac{\chi}{i\zeta} \exp(ik\zeta) \int_D \psi_0(M) \exp\left(\frac{ik}{2}(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{R}\right)\right) dx dy$

Enfin, puisque le domaine d'intégration D est la sphère qui constitue une surface équiphasé on a $\psi_0(M) = C^{te} = \psi_0 \forall M$. Et avec $k = 2\pi/\lambda$ on a donc :

$$\psi(P) = \psi_0 \frac{\chi}{i\zeta} \exp(ik\zeta) \int_D \exp\left(i\pi(x^2 + y^2) \frac{\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{R}\right)}{\lambda}\right) dx dy \quad \text{et donc} \quad \beta^2 = \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{R}\right)}$$

c) On utilise la formule fournie par l'énoncé pour calculer l'intégrale :

$$\int_D \exp\left(i\pi \frac{(x^2 + y^2)}{\beta^2}\right) dx dy = \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\pi \frac{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\beta}\right)^2}{2}\right) d\left(\frac{\sqrt{2}x}{\beta}\right) \right) \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\pi \frac{\left(\frac{\sqrt{2}y}{\beta}\right)^2}{2}\right) d\left(\frac{\sqrt{2}y}{\beta}\right) \right) = \frac{\beta^2}{2} (1+i)^2$$

et donc $\psi(P) = \psi_0 \frac{\chi}{i\zeta} \frac{\beta^2}{2} (1+i)^2 \exp(ik\zeta) = \psi_0 \frac{(1+i)^2}{i2} \frac{\chi\beta^2}{\zeta} \exp(ik\zeta)$. On a bien $\psi(P)$ proportionnel à :

$$\psi(P) \propto \frac{\chi\beta^2}{\zeta} \exp(ik\zeta) \quad \text{et donc} \quad b = \sqrt{\frac{\zeta}{\chi}}$$

3°) Si $\zeta > R$ alors $\beta^2 < 0$. Donc pour $\zeta = R^-$ la phase de l'onde en $P(R^-)$ est $\varphi(R^-) = 2\pi \frac{R}{\lambda}$, mais dès que $\zeta > R$ le terme en $\beta^2 < 0$ introduit un déphasage de π supplémentaire : $\varphi(R^+) = 2\pi \frac{R}{\lambda} + \pi$

Il y a donc un déphasage de π au passage d'un point de convergence.

Partie II : Franges de Meslin

1°) Les sources S_1 et S_2 sont des sources secondaires issues d'une même source primaire pour assurer leur cohérence et pouvoir ainsi sommer les vibrations :

$$\psi(P) = \psi_1(P) + \psi_2(P) = \psi_0 \left(\frac{\exp(ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(ikr_2)}{r_2} \exp(i\varphi_0) \right) \exp(-i\omega t)$$

L'intensité lumineuse en M est la valeur moyennée dans le temps du carré de la vibration résultante de la superposition des deux ondes : $I(P) = \langle \psi^2(P) \rangle = \frac{1}{2} |\psi(P)|^2$ d'où :

$$I(P) = \frac{\psi_0^2}{2} \left| \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(ikr_2)}{r_2} \exp(i\varphi_0) \right|^2 = \frac{\psi_0^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1 r_2} (\exp(ik(r_1 - r_2) - i\varphi_0) + \exp(-ik(r_1 - r_2) + i\varphi_0)) \right)$$

Ce qui donne $I(P) = \frac{\psi_0^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos(k(r_1 - r_2) - \varphi_0) \right)$ et puisque $r_1 \approx r_2 \approx r$, $k = 2\pi/\lambda$, et que

$I_0 = \frac{1}{2} \frac{\psi_0^2}{r^2}$ est l'intensité lumineuse issue d'une source arrivant en P :

$$I(P) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\varphi_0 + 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}\right) \right)$$

Les franges sont définies par $r_2 - r_1 = C^{te}$ ce sont donc des hyperboloïdes de révolution d'axe $S_1 S_2$. Dans un plan perpendiculaire à $S_1 S_2$, les franges sont donc des cercles.

2°) a) $k = 2\pi/\lambda$ A.N. : $k = 1,16 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
 $\omega = kc$ A.N. : $\omega = 3,47 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$

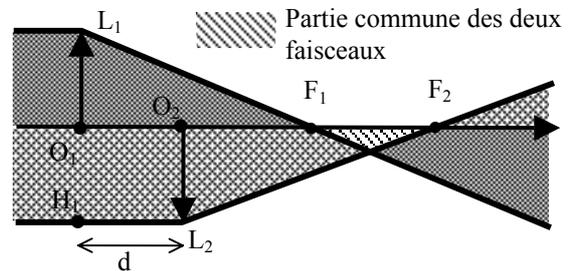
$v = \omega / 2\pi$ A.N. : $v = 5,52 \cdot 10^{14}$ Hz
 $\lambda = 543,5 \text{ nm}$ correspond à la radiation verte.

b) $\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} ((SF_2) - (SF_1))$

Le théorème de Malus permet d'affirmer que le plan perpendiculaire à l'axe optique contenant L_1 est un plan équiphase.

D'autre part le stigmatisme de la lentille impose que le chemin optique correspondant à la traversée de L_1 et au trajet jusqu'à F_1 est égale à celui de la traversée de L_2 et au trajet jusqu'à F_2 .
 On en déduit donc que $(SF_2) - (SF_1) = d$ et donc :

$$\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda}$$



c) $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (F_1P) + \pi$ le déphasage de π est dû au passage par le point de convergence. On a donc :

$$\varphi_1 = \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \pi$$

d) $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (F_2P)$ or $\varphi_0 = \varphi(F_2) - \varphi(F_1) = \varphi(F_2)$ puisque qu'on prend $\varphi(F_1) = 0$.

D'où :

$$\varphi_2 = \varphi_0 - \frac{2\pi r_2}{\lambda} = \frac{2\pi(d - r_2)}{\lambda}$$

3°) a) En utilisant le résultat de la question II.1°) on obtient :

$$I(P) = 2I_0(1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \Rightarrow I(P) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi(r_1 + r_2 - d)}{\lambda} + \pi \right) \right)$$

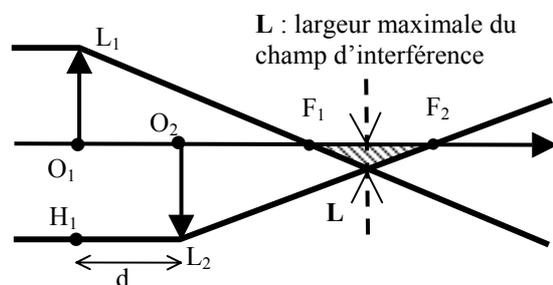
ou encore $I(P) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (r_1 + r_2) + \pi - \frac{2\pi d}{\lambda} \right) \right)$ et donc $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ en m^{-1} et $\beta = \pi - \frac{2\pi d}{\lambda}$ sans unité

A.N. : $\alpha = 1,16 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ $\beta = -2,31 \cdot 10^4$

Les franges d'interférences sont définies par $F_1P + F_2P = C^{te}$ ce sont donc des demi ellipsoïdes de révolution. Leur intersection avec un plan perpendiculaire à (F_1F_2) donne des demi-cercles centrés sur l'axe (F_1F_2) .

b) Le champ d'interférence est de taille maximale lorsque l'on place le plan d'observation de telle manière à ce qu'il passe par le point qui forme le sommet du triangle que constitue la zone de recouvrement des deux faisceaux.

On a les relations suivantes dans les triangles formés par les lentilles et les foyers (avec x la position du plan d'observation par rapport à F_1).



Dans le triangle 1 : $\frac{L}{D/2} = \frac{x}{f}$, dans le triangle 2 : $\frac{L}{D/2} = \frac{d-x}{f}$ d'où $L = \frac{dD}{4f}$ et $x = \frac{d}{2}$

A.N. : $L = 10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}$

c) Dans le plan méridien de F_1F_2 on a $r_1=r_2=r$ avec $\frac{d}{2} \leq r \leq \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L^2}$

Or les franges sombres sont définies par $\varphi_1 - \varphi_2 = p\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 + r_2) + \pi - \frac{2\pi d}{\lambda} = p\pi$ d'où :

$$r = \frac{n\lambda + d}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

L'encadrement de r donne l'encadrement de n :

$$0 \leq n \leq \frac{2}{\lambda} \left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L^2} - \frac{d}{2} \right) \quad \text{A.N. : } 0 \leq n \leq 18,35$$

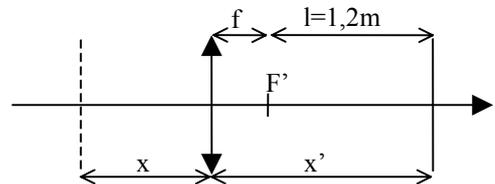
Il y a donc 19 franges sombres sur l'écran.

d) Relation de conjugaison : $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$

Grandissement : $\gamma = \frac{x'}{x}$

Or $x' = f + l$

D'où : $x = \frac{x'f}{f - x'} = \frac{(f+l)f}{-1} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{f}$ A.N. : $\gamma = -60$



Partie III : Coronographes

1°) a) Le foyer d'un miroir sphérique concave est tel que :

$$\overline{S_p F_p} = \frac{\overline{S_p C_p}}{2} = \frac{R_p}{2} \quad \text{A.N. : } \overline{S_p F_p} = 9,986 \text{ m}$$

On trouve l'image de F_p par le miroir 2 en utilisant les relations de conjugaisons pour un

miroir convexe : $\frac{1}{\overline{S_2 F_s}} + \frac{1}{\overline{S_2 F_p}} = \frac{2}{\overline{S_2 C_2}} \Rightarrow \overline{S_2 F_s} = \frac{\overline{S_2 F_p} \cdot \overline{S_2 C_2}}{2\overline{S_2 F_p} - \overline{S_2 C_2}} = \frac{\overline{S_2 F_p} \cdot R_2}{2\overline{S_2 F_p} - R_2}$

Or $\overline{S_2 F_p} = \overline{S_2 S_p} + \overline{S_p F_p} = -8,184 + 9,986 = 1,802 \text{ m}$

$$\text{A.N. : } \overline{S_2 F_s} = -9,345 \text{ m}$$

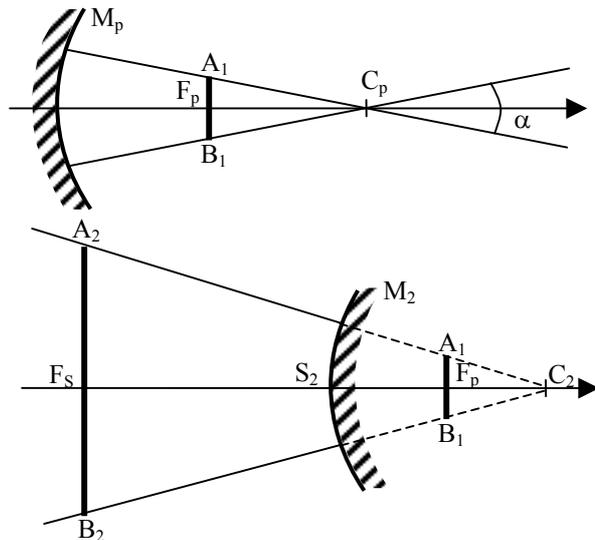
b) Soit $A_1 B_1$ l'image du soleil par M_p , elle se situe dans le plan focal image et a pour taille : $A_1 B_1 = \alpha \frac{R_p}{2}$.

Soit $A_2 B_2$ l'image de $A_1 B_1$ par le miroir 2, elle se situe dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par F_s (cf : III 1°) a). On a

$$\frac{A_2 B_2}{A_1 B_1} = \frac{C_2 F_s}{C_2 F_p} = \frac{C_2 S_2 + S_2 F_s}{C_2 S_2 + S_2 F_p} = \frac{R_2 + S_2 F_s}{R_2 - S_2 F_p} = \gamma = 5,18$$

et donc $A_2 B_2 = \gamma \frac{R_p}{2} \alpha$ A.N. : $A_2 B_2 = 0,48 \text{ m}$

Pour occulter l'image du soleil, et ne laisser passer que la couronne, il faut placer en F_s un diaphragme opaque de diamètre $D = 0,48 \text{ m}$.



c) On sait que la figure de diffraction à l'infini d'une fente rectangulaire de largeur D est une série de tâches lumineuses d'intensité décroissante dont les minima se situent en $\theta = p \frac{\lambda}{D}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$.

La largeur angulaire totale du maximum principal est donc $\beta = 2 \frac{\lambda}{D}$, dans le foyer du miroir

M_p cela donne donc une image de taille (cf : III 1° b)) $L' = A_1'B_1' = 2 \frac{\lambda}{D} \frac{R_p}{2} = \frac{\lambda}{D} R_p$.

La taille du maximum principal et des deux premières taches secondaires est obtenue de la même manière avec $-2 \leq p \leq 2 \Rightarrow L'' = A_1''B_1'' = 4 \frac{\lambda}{D} \frac{R_p}{2} = 2 \frac{\lambda}{D} R_p$

On obtient la taille de l'image de ces trois taches au foyer secondaire du télescope en utilisant le résultat de III 1° b) : $A_2''B_2'' = \frac{R_2 + S_2 F_S}{R_2 - S_2 F_p} A_1''B_1'' = \gamma \cdot 2 \frac{\lambda}{D} R_p$

Le diamètre minimal pour occulter ces tâches au foyer secondaire est donc :

$$\boxed{\Phi = 2\gamma \frac{\lambda}{D} R_p} \quad \text{A.N. : } \Phi = 5,70 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,57 \text{ mm}$$

2°) a) F_S est au foyer de L_1 , l'image de l'étoile est envoyée à l'infini (faisceau parallèle). La lentille L_2 placée sur le trajet 2, permet de faire passer le faisceau par un point de focalisation, ce qui entraîne un déphasage de π . Enfin la lentille L_3 projette l'image de l'étoile sur un écran placé dans son plan focal.

Rem : Le Michelson est réglé en lame d'air ($\alpha=0$ avec α inclinaison relative de M_1 par rapport à M_2 après rotation de $\pi/2$), la différence de longueur entre les deux bras du Michelson (d) n'est pas nulle car il faut compenser le chemin optique introduit par la lentille L_2 . d est réglé tel que la différence de marche $(F_S F_S')_2 - (F_S F_S')_1$ est nulle, la différence de marche totale se réduit donc à π due au passage par le point de convergence.

De plus il faut négliger ou bien compenser la variation d'intensité introduit par la lentille L_2 (absorption, réflexion) afin que $I_1(F_S') = I_2(F_S')$.

Toutes ces conditions étant remplies, on obtient des interférences destructives en F_S' , l'image de l'étoile disparaît !

b) Le système présenté précédemment est achromatique puisque le seul déphasage intervenant, est dû au passage par un point de convergence et est indépendant de la longueur d'onde. En revanche, on sait que les lentilles ne sont jamais parfaitement achromatiques, ce qui introduit une perturbation dans l'expérience !

Lorsque l'on observe une étoile et son environnement proche, cet instrument permet, de faire disparaître la lumière provenant de l'étoile, et faire ainsi ressortir celle qui provient des objets aux alentours.