Corrigé épreuve CCP MP physique 1

Mécanique

I - Oscillateur harmonique dans un champ de pesanteur

1. a) La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point$M$ donne, en projection sur l'axe Oz : $m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg$ d'où, $\boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}l_0 + g}$. La pulsation propre est donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

   b) À l'équilibre $\ddot{z} = 0$ et donc $\boxed{z_e = l_0 + \frac{mg}{k}}$.

   c) La solution est de la forme $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + z_e$. les conditions initiales sont $z(0) = z_e + a$ et $\dot{z}(0) = 0$; on obtient donc $\boxed{z(t) = a\cos(\omega_0 t) + z_e}$

2. a) L'énergie potentielle du point M est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur $-mgz + \text{cste}$ (Oz est orienté vers le bas) et de l'énergie potentielle élastique du ressort $\frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + \text{cste}$ d'où $\boxed{E_p(M) = -mg(z - z_e) + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(z_e - l_0)^2}$ si l'on impose $E_p(M) = 0$ à l'équilibre.

   b) Si l'on pose $Z = z - z_e$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_p(M) &= -mgZ + \frac{1}{2}k(Z + z_e - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(z_e - l_0)^2 \\ &= -mgZ + \frac{1}{2}kZ^2 + kZ(z_e - l_0) + \frac{1}{2}k(z_e - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(z_e - l_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}kZ^2 + Z(-mg + k(z_e - l_0)) \end{aligned}$$

   Comme $-mg + k(z_e - l_0) = 0$ correspond à la définition de la position d'équilibre, on a donc $\boxed{E_p(M) = \frac{1}{2}kZ^2}$.

   c) La valeur moyenne de $E_p(M)$ est $\langle E_p(M)\rangle = \frac{1}{2}k\langle Z^2\rangle = \frac{1}{2}k\langle a^2\cos^2(\omega_0 t)\rangle$ d'où $\boxed{\langle E_p(M)\rangle = \frac{1}{4}ka^2}$. Pour l'énergie cinétique, $\langle E_c(M)\rangle = \frac{1}{2}m\langle \dot{z}^2\rangle = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\langle \sin^2(\omega_0 t)\rangle$, d'où $\boxed{\langle E_c(M)\rangle = \frac{1}{4}ka^2}$. On a donc $\boxed{\langle E_c(M)\rangle = \langle E_p(M)\rangle}$, ce qui correspond bien au théorème du viriel puisque qu'ici $k = 2$.

   d) Applications numériques : $\boxed{\omega_0 = 14{,}1\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$ et $\boxed{\langle E_p\rangle = 12{,}5\ \text{mJ}}$.

II - Cas d'un système

1. La seule force conservative est le poids, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit alors, compte tenu de l'origine choisie : $E_p(M) = -mg(x - b)$, d'où $\boxed{E_p(\theta) = mgb(1 - \cos\theta)}$. Dans le cas où θ est petit, on obtient : $\boxed{E_p(\theta) = mgb\frac{\theta^2}{2}}$.
2. Le disque $(\mathcal{D})$ roulant sans glisser, la vitesse du point C s'écrit de deux manières différentes : $\vec{v}(C) = b\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{v}(C) = \vec{v}(I) + \dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{IC} = -a\dot{\varphi}\vec{e}_\theta$, avec I point de contact des deux solides. D'où $\boxed{b\dot{\theta} = -a\dot{\varphi}}$
3. L'énergie cinétique de $(\mathcal{D})$ est : $E_c(M) = \frac{1}{2}mv^2(C) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{4}ma^2\dot{\varphi}^2$, compte tenu de la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$, on obtient : $\boxed{E_c(M) = \frac{3}{4}m(b\dot{\theta})^2}$.
4. L'énergie mécanique est conservée car la force de frottement non conservative ne travaille pas à cause de l'absence de glissement.
5. On a donc $\frac{\mathrm{d}E_M}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où, $mgb\theta\dot{\theta} + \frac{3}{2}mb^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$. On a donc, $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3b}\theta = 0}$. Compte tenu des conditions initiales, on a donc $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_1 t)}$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{3b}}$.

6. a) On a donc, $\langle E_p\rangle = \frac{mgb}{2}\langle(\theta_0\cos(\omega_1 t))^2\rangle$ *i.e.* $\boxed{\langle E_p\rangle = \frac{mgb}{4}\theta_0^2}$ et $\langle E_c\rangle = \frac{3}{4}m\langle(b\theta_0\omega_1\sin(\omega_1 t))^2\rangle$ *i.e.* $\boxed{\langle E_c\rangle = \frac{mgb}{4}\theta_0^2}$. On a donc $\boxed{\langle E_p\rangle = \langle E_c\rangle}$, ce qui correspond bien au théorème du viriel puisque qu'ici $k = 2$.

b) Applications numériques : $\boxed{\langle E_c\rangle = 0{,}8\ \mathrm{mJ}}$.

III - Mouvement dans un champ newtonien

1. a) La force s'écrit $\boxed{\vec{F} = -G\frac{M_t m}{r^2}\vec{e}_r}$.

b) L'énergie potentielle E_p du satellite est telle que $\delta W = \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}E_p$. On obtient ici $\boxed{E_p = -G\frac{M_t m}{r}}$

c) On a donc $E_p(x,y,z) = -G\frac{M_t m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ d'où $E_p(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \frac{1}{\lambda}E_p(x,y,z)$ et donc ici $k = -1$. On a donc $\boxed{-\langle E_p\rangle = 2\langle E_c\rangle}$.

L'énergie mécanique s'écrit $E_M = E_p + E_c$. Le système étant conservatif, l'énergie mécanique est constante et sur une période on a donc : $\langle E_M\rangle = E_M = \langle E_c\rangle + \langle E_p\rangle$. Compte tenu du résultat précédent, on a donc : $\boxed{E_M = -\langle E_c\rangle = \frac{1}{2}\langle E_p\rangle}$. L'énergie mécanique est donc négative pour un état lié (d'après le préambule de l'énoncé, on n'étudie que les trajectoires bornées donc les états liés).

d) Sur une trajectoire circulaire, le rayon est constant donc l'énergie potentielle et donc l'énergie cinétique aussi. D'après la relation précédente, on a donc $-\frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}\frac{-GM_t m}{r_0}$ d'où $\boxed{v_c = \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}}$.

2. a) Le théorème du moment cinétique appliqué en O donne : $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = 0$. On a donc $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donc constamment perpendiculaire à un vecteur constant. Le mouvement est donc plan. Dans le repère en polaire, le moment cinétique s'écrit $\vec{L}_O = mr\vec{e}_r\wedge(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. On a donc bien $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$ constant.

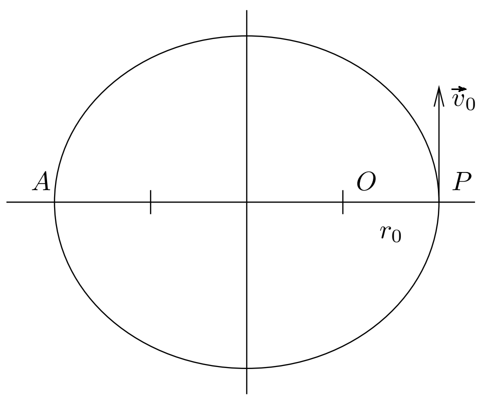
b) L'énergie mécanique vaut $E_M = -\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_t m}{r_0} = \frac{GM_t m}{r_0}\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)$. Comme $1 < \alpha < \sqrt{2}$, on a donc $E_M < 0$. La trajectoire est donc bornée.

c) D'après la formule de Binet, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit $-mC^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = -GM_t mu^2$ avec $u = \frac{1}{r}$. Les solutions de cette équation sont du type $u = u_0\cos(\theta-\theta_0) + \frac{GM_t}{C^2}$. On a donc $\boxed{r = \frac{C^2}{GM_t}\frac{1}{1+e\cos\theta}}$ par un choix judicieux de l'origine des angles. On a donc $\boxed{C' = C^2}$.

d) D'après la question 2.a, $C = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{v} = r_0v_0 = r_0\alpha\sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$. D'autre part $p = \frac{C^2}{GM_t}$. On a donc $p = r_0^2\alpha^2\frac{GM_t}{r_0}\frac{1}{GM_t}$ d'où $\boxed{p = r_0\alpha^2}$.

e) Sur la trajectoire elliptique, il n'y a que deux points pour lesquels la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur : le périgée et l'apogée. On a donc $r_0 = \frac{p}{1+e}$ ou $r_0 = \frac{p}{1-e}$. Comme $p = r_0\alpha^2$ avec $\alpha > 1$, on a nécessairement $r_0 = \frac{p}{1+e}$ et donc $\boxed{e = \alpha^2 - 1}$.

f) On a donc $\boxed{r_p = r_0}$ et $r_a = \frac{p}{1-e} = \frac{r_0\alpha^2}{1-(\alpha^2-1)}$ et donc $\boxed{r_a = \frac{r_0\alpha^2}{2-\alpha^2}}$.



3. a) D'après la question 2.c, on a $E = -\frac{GM_t m}{2a} = E_c + E_p = E_c - \frac{GM_t m}{r}$ d'où $E_c = GM_t m\left(\frac{-1}{2a} + \frac{1}{r}\right)$. Or $2a = r_p + r_a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$. On a donc $E_c = GM_t m\left(-\frac{1-e^2}{2p} + \frac{1+ecos\theta}{p}\right)$ et donc $\boxed{E_c = \frac{GM_t m}{2p}\left(1 + e^2 + 2e\cos\theta\right)}$

b) L'énergie potentielle vaut $E_p = -\frac{GM_t m}{r}$ d'où $\boxed{E_p = -\frac{GM_t m}{p}\left(1 + e\cos\theta\right)}$

c) Le théorème du viriel donne : $2\langle E_c\rangle = -\langle E_p\rangle$, *i.e.* $2\langle\frac{GM_t m}{2p}\left(1 + e^2 + 2e\cos\theta\right)\rangle = -\langle-\frac{GM_t m}{p}\left(1 + e\cos\theta\right)\rangle$ d'où $1 + e^2 + 2e\langle\cos\theta\rangle = 1 + e\langle\cos\theta\rangle$ et donc $\boxed{\langle\cos\theta\rangle = -e}$.
Ce résultat n'est pas surprenant car il s'agit d'une moyenne temporelle et θ n'est pas ici une fonction linéaire du temps.
Pour $\langle\sin\theta\rangle$, à cause des symétries de l'ellipse, $\boxed{\langle\sin\theta\rangle = 0}$.

4. a) Comme $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $GM_t = \frac{C^2}{p}$, la troisième loi de Kepler s'écrit : $T^2\frac{(1-e^2)^3}{p^3} = 4\pi^2\frac{p}{C^2}$ d'où $\boxed{T = 2\pi\frac{p^2}{C}\left(1-e^2\right)^{-3/2}}$.

b) Comme $C = r^2\dot{\theta}$, on a donc $\mathrm{d}t = \frac{p^2}{C}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{T\left(1-e^2\right)^{3/2}}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$. On a donc
$$\boxed{\Delta t = \frac{T\left(1-e^2\right)^{3/2}}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos\theta)^2}}$$
Application numérique : on a donc $\Delta t_1 = 0{,}020T$. On constate donc que le satellite passe beaucoup moins de temps sur « la partie droite » de l'ellipse pour laquelle $\cos\theta\rangle 0$ que sur « la partie gauche ». Il est donc normal que $\langle\cos\theta\rangle$ soit négatif.

5. a) Dans l'atome d'hydrogène la force qui s'exerce entre le proton et l'électron est d'une forme semblable à celle qui s'exerce sur un satellite autour de la terre : $\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ et correspond à un état lié du système. On a donc, en général, des trajectoires elliptiques.

b) Le moment dipolaire instantané de l'atome d'hydrogène s'écrit : $\boxed{\vec{P} = -qr\vec{e}_r = \frac{qp_0}{1+e\cos\theta}\vec{e}_r}$. Dans le cas où $e \ll 1$, le moment dipolaire s'écrit $\vec{P} = -qp_0\left(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\right)$ d'où $\boxed{\langle\vec{P}\rangle = qp_0 e\vec{e}_x}$
Application numérique : $\boxed{P = 0{,}12\text{ D}}$.

c) Dans le modèle quantique, l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental occupe l'orbitale $1s$, qui a la symétrie sphérique. Donc le moment dipolaire est nul. Le modèle précédent (orbite faiblement elliptique) ne peut donc convenir. Par contre le modèle classique de Bohr donne le bon moment dipolaire puisque les orbites sont circulaires ($e = 0$).

Thermodynamique

A Fonctions d'état d'un système fermé

A.1.

A.1.1 Par définition, la capacité thermique à volume constant est : $\boxed{C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$; la capacité thermique à pression constante est : $\boxed{C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}$

A.1.2 Si l'énergie interne ne dépend pas de V alors le terme $(l-p)$ est nul donc $\boxed{l = p}$.
Si l'enthalpie ne dépend pas de p alors le terme $(k+V)$ est nul et $\boxed{k = -V}$.

A.2.

A.2.1 Pour un système fermé $\mathrm{d}F = \mathrm{d}U - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T$. Or l'identité thermodynamique donne $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$ d'où : $\boxed{\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V}$.
De même pour l'enthalpie libre : $\mathrm{d}G = \mathrm{d}H - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T$. Avec $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$, on obtient $\boxed{\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p}$.

A.2.2 F et G étant des fonctions d'état, ce sont donc des différentielles totales et donc :

- pour F : $-\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$. Comme la différentielle de l'entropie s'écrit : $\mathrm{d}S = \frac{C_v}{T}\mathrm{d}T + \frac{l}{T}\mathrm{d}V$, on a donc $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{l}{T}$ d'où : $\boxed{l = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$;
- pour G : $-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Comme la différentielle de l'entropie s'écrit : $\mathrm{d}S = \frac{C_p}{T}\mathrm{d}T + \frac{k}{T}\mathrm{d}V$, on a donc $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{k}{T}$ d'où : $\boxed{k = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}$.

B - Détente de Joule et Gay-Lussac d'un gaz réel

B.1. L'énergie interne étant une fonction d'état, on a donc $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial (l-p)}{\partial T}\right)_V$. Avec l'expression de l obtenue précédemment on a : $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right)\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$. On a donc $\boxed{\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V}$.

B.2. L'équation d'état donne $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2}$. On a donc $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} + \frac{a}{T^2V^2}$ et $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = \frac{-2a}{T^3V^2}$. La capacité thermique à volume constant est donc telle que : $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = \frac{-2a}{T^2V^2}$. On a donc $C_v = \frac{2a}{T^2V} + \text{cste}$. Comme $C_v(T,V) \underset{V\to\infty}{\longrightarrow} C_0$ indépendant de T, on a donc $\boxed{C_v = \frac{2a}{T^2V} + C_0}$.

B.3. D'après la question A.2.2, on a donc pour cette équation d'état $l = \frac{RT}{V-b} + \frac{a}{TV^2}$ et $l - p = \frac{2a}{TV^2}$. D'où $\mathrm{d}U = (\frac{2a}{T^2V} + C_0)\mathrm{d}T + \frac{2a}{TV^2}\mathrm{d}V$. On obtient alors $\boxed{U - U_0 = \frac{-2a}{TV} + C_0T}$.

B.4.

B.4.1 Les conditions expérimentales de la détente de Joule et Gay-Lussac sont les suivantes :

- enceinte rigide et calorifugée séparée en deux sous-enceintes de volume V_1 et $V_2 - V_1$ par une paroi ;
- au départ seule la sous-enceinte de volume V_1 contient du gaz, l'autre étant vide ;
- à $t = 0$, on enlève la paroi.

Si on s'intéresse au système formé par les deux sous-enceintes, celui-ci ne reçoit ni travail (système rigide donc $V = \text{cste}$), ni chaleur (calorifugé). On a donc d'après le premier principe $\boxed{\Delta U = 0}$ pour le système et donc pour le gaz car l'énergie interne du vide est nulle.

B.4.2 On a donc ici $0 = \Delta U = \frac{-2a}{(T1+\Delta T)2V_1} + C_0(T_1+\Delta T) - \left(\frac{-2a}{T_1V_1} + C_0T_1\right) = C_0\Delta T - \frac{2a}{T_1V_1}\left(\frac{T_1}{2(T1+\Delta T)} - 1\right) = C_0\Delta T + \frac{a}{T_1V_1}\left(1 + \frac{\Delta T_1}{T_1}\right)$ d'où $\boxed{\Delta T_1 = -\frac{a}{T_1V_1}\left(C_0 + \frac{a}{T_1^2V_1}\right)^{-1}}$.

B.4.3 La transformation est clairement irréversible. Comme, de plus, elle est adiabatique, le second principe de la thermodynamique implique que l'entropie du gaz augmente.

B.4.4

B.4.4.1 Application numérique : $\boxed{\Delta T = -1{,}14\ \mathrm{K}}$.

B.4.4.2 Pour un gaz parfait, la première loi de Joule indique que l'énergie interne ne dépend que de T, donc, comme U est constant au cours de la transformation, T l'est aussi et donc $\boxed{\Delta T = 0}$ pour une détente de Joule et Gay-Lussac d'un gaz parfait.

C - Détente de Joule Thomson (Joule Kelvin) d'un gaz réel

C.1. Par définition $H = U + pV$, d'où $H = \frac{-2a}{TV} + C_0T + pV = C_0T + RT + \left(b - \frac{a}{RT^2}\right)p - \frac{2a}{TV}$ or $\frac{2a}{TV} = \frac{2ap}{RT^2}\frac{1}{1+\frac{pB(T)}{RT}}$. Or $pB(T) \ll RT$ car c'est un terme correctif à l'équation d'un gaz parfait. On a donc bien $\boxed{H = (C_0 + R)T + \left(b - \frac{3a}{RT^2}\right)p}$

C.2.

C.2.1 Pour une détente de Joule Thomson $\boxed{\Delta H = 0}$.

C.2.2 On a donc $0 = \Delta H = (C_0+R)(T_1+\Delta T)+\left(b - \frac{3a}{R(T_1+\Delta T)^2}\right)2p_1 - \left[(C_0+R)T_1 + \left(b - \frac{3a}{RT_1)^2}\right)p_1\right] = (C_0+R)\Delta T + bp_1 - \frac{3ap_1}{RT_1^2}\left(\frac{2T_1^2}{(T_1+\Delta T)^2} - 1\right) = (C_0+R)\Delta T + bp_1 - \frac{3ap_1}{RT_1^2}\left(1 - \frac{4\Delta T}{T_1}\right)$. On a donc $\boxed{\Delta T = \left(-bp_1 + \frac{3ap_1}{RT_1^2}\right)\left(C_0 + R + \frac{12ap_1}{RT_1^3}\right)^{-1}}$

C.2.3 Application numérique : $\boxed{\Delta T = 1{,}97\ \mathrm{K}}$.

D - Application des principes de la thermodynamique à un système fermé en mouvement

D.1. L'énergie totale d'un système est la somme de son énergie cinétique macroscopique, de l'énergie potentielle des forces extérieures et de son énergie interne *i.e.* $\boxed{E = E_c + E_p + U}$.

D.2. Pour un système fermé, le premier principe s'écrit : $\boxed{\Delta E = W + Q}$.

D.3.

D.3.1 À l'instant t la masse du système $S(t)$ est $M(v) + \rho_1 w_1 \Sigma_1 \mathrm{d}t$. À l'instant $t + \mathrm{d}t$ la masse du système $S(t+\mathrm{d}t)$ est $M(v) + \rho_2 w_2 \Sigma_2 \mathrm{d}t$. Le système étant fermé, on a donc $M(v) + \rho_1 w_1 \Sigma_1 \mathrm{d}t = M(v) + \rho_2 w_2 \Sigma_2 \mathrm{d}t$. Le régime étant stationnaire, on a donc $\boxed{\rho_1 w_1 \Sigma_1 = \rho_2 w_2 \Sigma_2}$.

D.3.2 Entre les instants $t+\mathrm{d}t$ et t la variation de l'énergie du système est $\Delta E = E(t+\mathrm{d}t) - E(t) = E(v) + E_{c2} + E_{p2} + U_2 - (E(v) + E_{c1} + E_{p1} + U_1)$, soit $\Delta E = \frac{1}{2}\delta m w_2^2 + \delta m g z_2 + \delta m u_2 - \frac{1}{2}\delta m w_1^2 - \delta m g z_1 - \delta m u_1$. D'autre part le système étant fermé, le premier principe conduit à : $\Delta E = \delta W + \delta W' + \delta Q$. Le travail $\delta W'$ des forces de pression s'écrit : $\delta W' = -p_2 w_2 \mathrm{d}t \Sigma_2 + p_1 w_1 \mathrm{d}t \Sigma_1 = -p_2 \frac{\delta m}{\rho_2} + p_1 \frac{\delta m}{\rho_1}$ car $\rho_1 w_1 \Sigma_1 \mathrm{d}t = \rho_2 w_2 \Sigma_2 \mathrm{d}t = \delta m$ d'après la question précédente. On a donc $\frac{1}{2}\delta m w_2^2 + \delta m g z_2 + \delta m u_2 - \frac{1}{2}\delta m w_1^2 - \delta m g z_1 - \delta m u_1 = -p_2 \frac{\delta m}{\rho_2} + p_1 \frac{\delta m}{\rho_1} + \delta W + \delta Q$. Comme $u_i + \frac{p_i}{\rho_i} = h_i$ par définition de l'enthalpie on donc : $\boxed{\delta m\left[\left(\frac{1}{2}w_2^2 + g z_2 + h_2\right) - \left(\frac{1}{2}w_1^2 + g z_1 + h_1\right)\right] = \delta W + \delta Q}$

D.3.3 La détente de Joule Thomson correspond à :

- $\delta Q = 0$ car le système est calorifugé ;
- $\delta W = 0$ car il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression ;
- $w_1 \approx 0$ et $w_2 \approx 0$ car l'écoulement est lent ;
- $z_1 = z_2$ car l'écoulement est horizontal.

On a alors $h_2 = h_1$.

E - Détente d'un fluide gazeux dans une tuyère

E.1. On a ici $\delta Q = 0$ car le système est calorifugé et $\delta W = 0$ car il n'y a pas de perte énergétique. De plus la tuyère est horizontale. On a donc $\left(\frac{1}{2}w(x)^2 + h(x)\right) - \left(\frac{1}{2}w_1^2 + h_1\right) = 0$ d'où $\boxed{\left(\frac{1}{2}w(x)^2 + MH(x)\right) - \left(\frac{1}{2}w_1^2 + MH_1\right) = 0}$.

E.2. La détente étant adiabatique et réversible, elle est isentropique. L'identité thermodynamique donne alors : $\mathrm{d}s = 0 = M\mathrm{d}H - \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$. On a donc $M\left(H(x) - H_1\right) = \int_{p_1}^{p(x)} \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$. On a donc alors : $\boxed{\frac{1}{2}w(x)^2 - \frac{1}{2}w_1^2 + \int_{p_1}^{p(x)} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(x)} = 0}$.

E.3.

E.3.1 Pour un gaz parfait, lors d'une détente isentropique $p\rho^{-\gamma}$ est constant. On a donc $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1 p(x)^{1/\gamma}}$. On a alors $\int_{p_1}^{p(x)} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1}\int_{p_1}^{p(x)} \frac{\mathrm{d}p}{p(x)^{1/\gamma}} = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(p(x)^{-1/\gamma+1} - p_1^{-1/\gamma+1}\right) = \frac{p_1}{\rho_1}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\varepsilon^{-1/\gamma+1} - 1\right)$. On a donc $\frac{1}{2}w(x)^2 = \frac{1}{2}w_1^2 - \frac{p_1}{\rho_1}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\varepsilon^{-1/\gamma+1} - 1\right)$. Comme le gaz est parfait $\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{RT_1}{M}$ et $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$. On obtient donc : $\boxed{w(x)^2 = w_1^2 - \frac{2C_pT_1}{M}\left(\varepsilon^{1-1/\gamma} - 1\right)}$.

E.3.2 D'après la question D.3.1 le débit massique est $q_m = w(x)\rho(x)\Sigma(x)$. Comme le gaz est parfait et la détente isentropique, on obtient $q_m = w(x)\Sigma(x)\rho_1\left(\frac{p_1}{p(x)}\right)^{-1/\gamma}$ et donc $\boxed{q_m = w(x)\Sigma(x)\rho_1\varepsilon^{1/\gamma}}$.

E.3.3

E.3.3.1 D'après les questions E.3.2 et E.3.1, on en déduit $q_m = \Sigma(x)\rho_1\varepsilon^{1/\gamma}\sqrt{\frac{2C_pT_1}{M}}\left(1-\varepsilon^{1-1/\gamma}\right)^{1/2}$. On a donc $\boxed{K_1 = \rho_1\sqrt{\frac{2C_pT_1}{M}}}$ et $\boxed{f(\varepsilon) = \varepsilon^{1/\gamma}\left(1-\varepsilon^{1-1/\gamma}\right)^{1/2}}$.

E.3.3.2 On a $f'(\varepsilon) = \frac{\frac{2}{\gamma}\varepsilon^{2/\gamma-1}-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\varepsilon^{1/\gamma}}{2\sqrt{\varepsilon^{2/\gamma}-\varepsilon^{1+1/\gamma}}}$. On a donc $f'(\varepsilon) = 0$ quand $\frac{2}{\gamma} - \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\varepsilon^{1-1/\gamma} = 0$. D'où $\boxed{\varepsilon_0 = \left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$. La fonction est alors croissante sur $[0\ ;\ \varepsilon_0]$ et décroissante sur $[\varepsilon_0\ ;\ 1]$.

E.3.3.2.1 $p(x)$ étant une fonction décroissante de x, ε varie de 1 à $\frac{p_2}{p_1}$. Si $\frac{p_2}{p_1}$ est supérieure à ε_0 alors $f(\varepsilon)$ croit avec x. Comme q_m est constant, cela signifie que $\Sigma(x)$ décroit.

E.3.3.2.2 Si $\frac{p_2}{p_1}$ est inférieure à ε_0 alors $f(\varepsilon)$ croit puis décroit avec x. Comme q_m est constant, cela signifie que $\Sigma(x)$ décroit puis croit.

Dans ce cas $p_0 = p_1\varepsilon_0$ d'où $\boxed{p_0 = p_1\left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$. D'après la question E.3, on a alors $w_0^2 = \frac{2C_pT_1}{M}\left(1-\varepsilon_0^{1-1/\gamma}\right)$ d'où $\boxed{w_0 = \sqrt{\frac{2R\gamma T_1}{M(\gamma-1)}\left(1-\frac{2}{1+\gamma}\right)}}$

E.3.3.3

E.3.3.3.1 Application numérique : on a donc $\boxed{p_0 = 10{,}6 \text{ bar}}$ et $\boxed{w_0 = 817 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

E.3.3.3.2 Si $p_2 = 1$ bar alors $\varepsilon_2 = 0{,}1$ et donc $\boxed{w_2 = 1{,}39.10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$.