

Optique géométrique (CCP 2007 MP)



I. DEFINITIONS

1. Systèmes optiques

- a. Qu'appelle-t-on système optique centré ?

Un système centré est un système présentant un axe de symétrie que l'on appelle « axe optique ».

- b. Qu'est-ce qu'un système catadioptrique ?

Un système optique catadioptrique est un système contenant au moins un miroir.

2. Stigmatisme

- a. Stigmatisme rigoureux.

Un point A' est dit rigoureusement stigmatique d'un point A si le chemin optique AA' est rigoureusement le même pour tous les rayons traversant le système optique.

- b. Système optique rigoureusement stigmatique pour tout point de l'espace.

Il n'existe qu'un seul système de ce type : le miroir plan.

3. Aplanétisme

- a. Aplanétisme rigoureux.

Un point A' est dit rigoureusement aplanétique d'un point A si l'image B' d'un point B voisin de A tel que AB soit transverse est voisine de A' et telle que $A'B'$ soit transverse.

- b. Système optique rigoureusement aplanétique pour tout point de l'espace.

Il n'existe qu'un seul système de ce type : le miroir plan.

A. Approximation de Gauss

- a. Conditions de Gauss.

Deux conditions doivent être réalisées :

- 1- Les rayons doivent être peu éloignés de l'axe optique.
- 2- Les rayons doivent être peu inclinés par rapport à l'axe optique.

- b. Stigmatisme dans l'approximation de Gauss.

Dans l'approximation de Gauss, tout point A admet une image A' dans une condition de stigmatisme approché : les différents chemins optiques (AA') ne diffèrent que d'une quantité petite par rapport à la demi longueur d'onde.

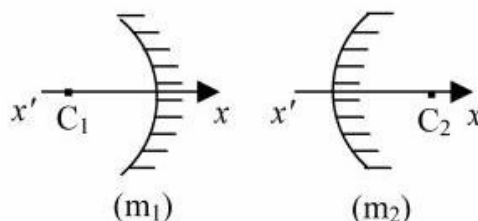
II. ETUDE DES MIROIRS SPHERIQUES

1. Caractère convergent ou divergent d'un miroir sphérique

- a. Miroir convexe

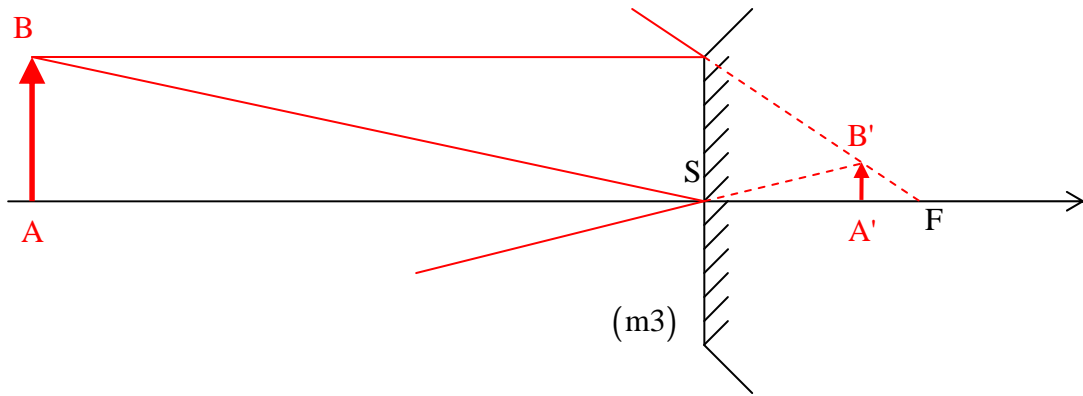
Un miroir convexe (i.e. plus épais au centre que sur les bords) est divergent.

- b. Quel miroir (m_1) ou (m_2) est-il divergent ?



Le miroir (m_2) est convexe, donc divergent.

c. Le miroir (m3) est-il convergent ou divergent ?



Ce miroir est divergent (l'image formée est virtuelle).

2. Relations de conjugaison et de grandissement.

a. Relation de conjugaison de Descartes.

a.1. Relations liant α , α' et β aux grandeurs algébriques \overline{SA} , $\overline{SA'}$, \overline{SC} et \overline{HI} dans l'approximation de Gauss.

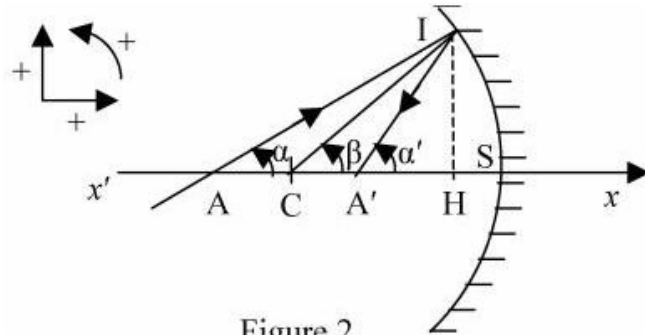


Figure 2

$$\alpha = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA}} ; \alpha' = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA'}} ; \beta = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SC}}.$$

a.2. Exprimer la relation entre α , α' et β .

D'après la loi de Descartes relative à la réflexion, nous avons $\beta - \alpha = \alpha' - \beta$, ou encore : $\alpha' + \alpha = 2\beta$.

a.3. En déduire la relation de conjugaison au sommet du miroir.

La relation $\alpha' + \alpha = 2\beta$ s'écrit aussi bien : $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$. On en déduit donc $k_1 = 2$

a.4. Expressions des distances focales.

Le foyer image F' est l'image d'un objet à l'infini sur l'axe : $\frac{1}{\overline{SF'}} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{f'}$. On en

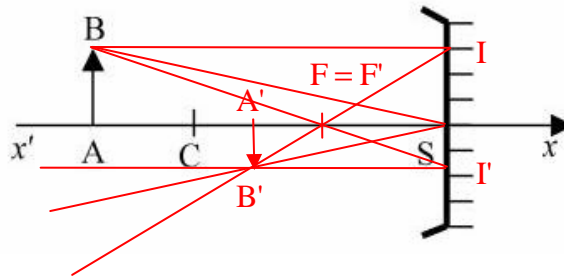
déduit : $f' = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$.

Le foyer objet F a son image rejetée à l'infini sur l'axe : $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{f}$. On en déduit :

$$f = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

b. Relation de conjugaison de Newton.

b.1. Construction géométrique.



b.2. Relation de conjugaison de Newton.

Nous obtenons cette relation en exprimant le grandissement de deux façons différentes ;

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \text{ et } \gamma = \frac{\overline{SI'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} \text{ et donc } \overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2 = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f \cdot f'$$

c. Relation de conjugaison : origine au centre.

c.1. Relations.

$$\overline{FA} = \overline{CA} - \overline{CF} = \overline{CA} - \frac{1}{2} \overline{CS} \text{ et } \overline{FA'} = \overline{CA'} - \overline{CF} = \overline{CA'} - \frac{1}{2} \overline{CS}$$

c.2. Dédire la formule de conjugaison avec origine au centre.

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \left(\overline{CA} - \frac{1}{2} \overline{CS} \right) \left(\overline{CA'} - \frac{1}{2} \overline{CS} \right) = \frac{1}{4} \overline{CS}^2 \text{ soit : } \frac{1}{2} \overline{CS} \cdot \overline{CA'} + \frac{1}{2} \overline{CS} \cdot \overline{CA} = \overline{CA} \cdot \overline{CA'}$$

Nous obtenons la relation de conjugaison en multipliant chaque membre par $\frac{2}{\overline{CS} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CA'}}$, ce

qui donne : $\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

Nous retrouvons la formule attendue, avec $k_2 = 2$

d. Grandissement.

d.1. En fonction de \overline{SA} et $\overline{SA'}$.

Observons les triangles SAB et SA'B' : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

d.2. En fonction de \overline{FA} , $\overline{FA'}$ et \overline{FS} .

Nous avons déjà démontré à la question b.2. : $\gamma = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$

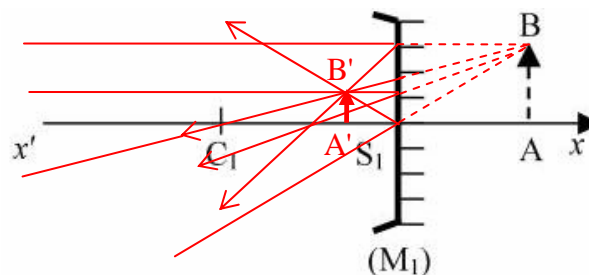
d.3. En fonction de \overline{CA} et $\overline{CA'}$.

Observons les triangles CAB et CA'B' : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = + \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

3. Correspondance objet-image pour des miroirs concaves et convexes.

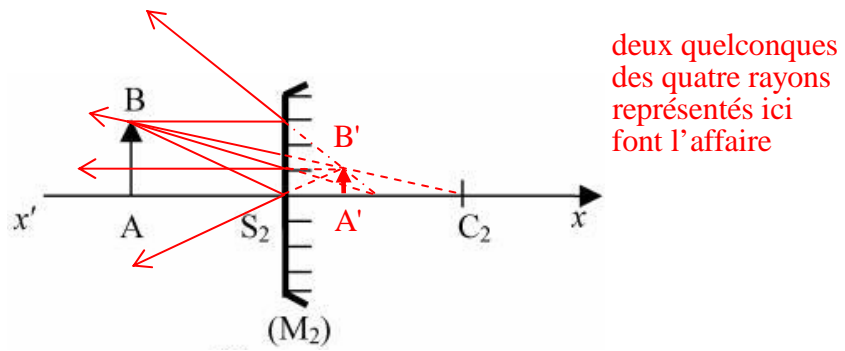
a. Construction géométrique de l'image A'B' d'un objet AB transverse.

a.1. Miroir (M₁)



deux quelconques des quatre rayons représentés ici font l'affaire

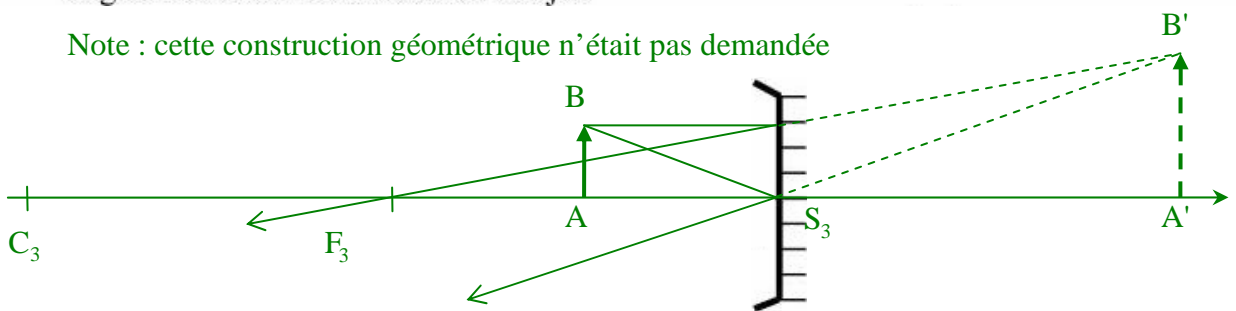
a.2. Miroir (M₂)



b. Position de l'image A'B' et grandissement transversal.

b.1. Le miroir (M₃) est concave, de rayon de courbure R₃ tel que |R₃| = 20 cm. L'objet AB est situé au milieu de F₃S₃ (F₃ : Foyer objet ; S₃ : Sommet). Calculer $\overline{S_3A'}$ et en déduire le grandissement transversal de l'objet.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



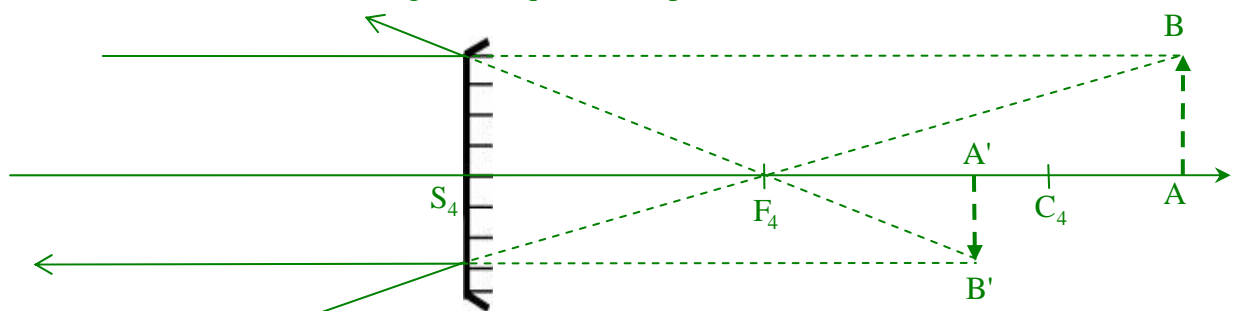
Utilisons la formule de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{S_3A'}} = \frac{2}{\overline{S_3C_3}} - \frac{1}{\overline{S_3A}} = -\frac{2}{|R_3|} - \frac{2}{\overline{S_3F_3}} = -\frac{2}{|R_3|} + \frac{4}{|R_3|} = +\frac{2}{|R_3|} \text{ donc } \overline{S_3A'} = \frac{1}{2}|R_3| = 10 \text{ cm}$$

Le grandissement transversal est donc égal à +2.

b.2. Le miroir (M₄) est convexe, de rayon de courbure R₄ tel que |R₄| = 40 cm. L'objet AB est situé après S₄ tel que $\overline{S_4A} = 50 \text{ cm}$. Calculer $\overline{C_4A'}$ et en déduire le grandissement transversal de l'objet.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



Utilisons la formule de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{C_4A'}} = \frac{2}{\overline{C_4S_4}} - \frac{1}{\overline{C_4A}} = \frac{2}{\overline{C_4S_4}} - \frac{1}{\overline{C_4S_4} + \overline{S_4A}} = -\frac{2}{|R_4|} - \frac{1}{-|R_4| + \overline{S_4A}} = \frac{-2\overline{S_4A} + |R_4|}{|R_4|(\overline{S_4A} - |R_4|)}$$

et donc : $\overline{C_4A'} = \frac{|R_4|(\overline{S_4A} - |R_4|)}{-2\overline{S_4A} + |R_4|} = \frac{40(50 - 40)}{-2 \times 50 + 40} = -\frac{20}{3} = -6,67 \text{ cm}$

Grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{C_4A'}}{\overline{C_4A}} = -\frac{\overline{C_4A'}}{\overline{S_4A} - |R_4|} = -\frac{20}{3(50 - 40)} = -\frac{2}{3}$

4. Système réflecteur : le télescope de Cassegrain

a. Observation de la Lune

a.1. Image de la Lune

Après réflexion sur (M) , l'image de la Lune est à une distance $\overline{FA'} = \frac{f^2}{FA} = \frac{R^2}{4D_{TL}} \approx 0$

Autant dire que cette image est dans le plan focal du miroir à la position $\overline{SF} = \frac{R}{2}$

a.2. Diamètre apparent de la Lune

Le disque lunaire est vu sous l'angle $\epsilon = \frac{D_L}{D_{TL}} = \frac{3456}{384000} = 9 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0,516^\circ = 30,9'$

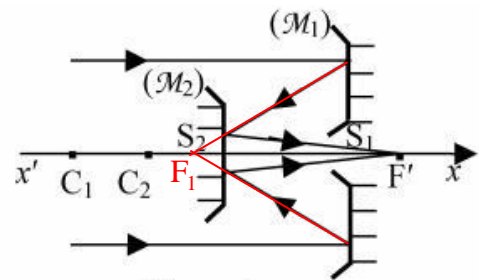
a.3. Dimension de l'image de la Lune

$$\overline{A'B'} = \left| \overline{AB} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \right| = \frac{D_L}{D_{TL}} \overline{SA'} = \epsilon \frac{|R|}{2} = 9 \times 10^{-3} \frac{60}{2} = 0,27 \text{ cm}$$

b. Télescope de type Cassegrain

b.1. Image intermédiaire de la Lune

L'image $A'B'$ de la Lune dans le miroir (M_1) doit être virtuelle et située en arrière du miroir (M_2) au point F_1 conjugué de l'image $A''B''$.



b.2. Position du foyer image F'

$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} + \frac{1}{\overline{S_2F_1}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} \text{ et donc } \frac{1}{\overline{S_2F'}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} - \frac{1}{\overline{S_2S_1 + S_1F_1}} = \frac{2}{R_2} - \frac{1}{d + \frac{R_1}{2}} = \frac{2(2d + R_1 - R_2)}{R_2(2d + R_1)}$$

Enfinement : $\overline{S_2F'} = \frac{R_2(2d + R_1)}{2(2d + R_1 - R_2)}$

Remarque : dans cette formule, les deux rayons sont négatifs.

b.3. Grandissement transversal de $A'B'$ à travers (M_2)

$$\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = - \frac{\overline{S_2A''}}{\overline{S_2A'}} = - \frac{\overline{S_2F'}}{\overline{S_2F_1}} = - 2 \frac{\overline{S_2F'}}{\overline{S_2S_1 + S_1C_1}} = - \frac{R_2(2d + R_1)}{(d + R_1)(2d + R_1 - R_2)}$$

b.4. Applications numériques

$$\overline{S_2F'} = \frac{-40(2 \times 18 - 60)}{2(2 \times 18 - 60 + 40)} = 30 \text{ cm} ; \gamma = 2,5 \text{ et } \overline{A''B''} = \gamma \overline{A'B'} = 2,5 \times 0,27 = 0,675 \text{ cm}$$

b.5. Focale d'une lentille simple équivalente

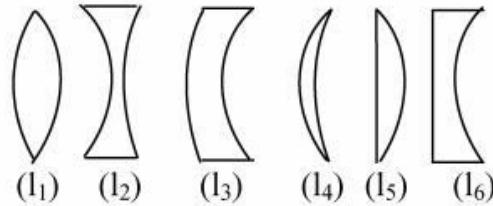
Une lentille convergente de distance focale image f_L donnerait de la Lune une image de diamètre $f_L \epsilon$. Nous en déduisons : $f_L = \frac{\overline{A''B''}}{\epsilon} = \frac{0,675}{9 \times 10^{-3}} = 75 \text{ cm}$.

Commentaire : Le montage optique de type Cassegrain est bien plus compact (30 cm au lieu de 75 cm).

III. ETUDE DES LENTILLES MINCES

1. Caractère convergent ou divergent d'une lentille mince.

a. Formes des lentilles sphériques minces

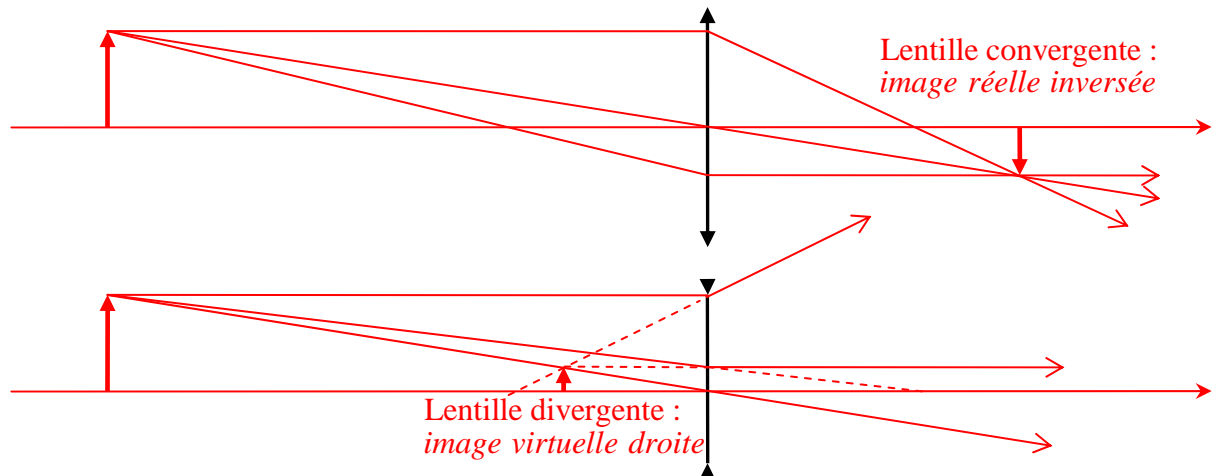


La lentille biconcave est la lentille (l_2) , la lentille ménisque convergente est la lentille (l_4) et la lentille plan concave est la lentille (l_6) .

b. Observation d'un objet éloigné.

On vise un objet placé à grande distance en plaçant l'œil loin d'une lentille (l_7) . Nous voyons une image inversée de l'objet. La lentille (l_7) est-elle convergente ou divergente ? Justifier votre réponse.

Comme le montrent les constructions ci-dessous, si l'image d'un objet lointain est inversée, la lentille est convergente. S'il s'agissait d'une lentille divergente, l'image serait virtuelle et droite.



c. Déplacement transversal.

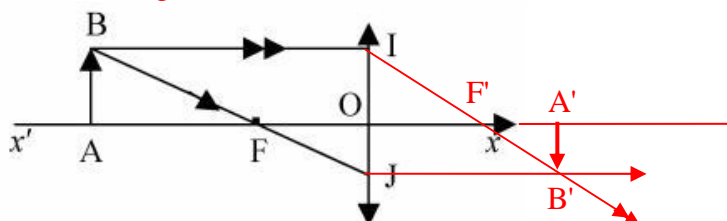
On place un objet réel de telle sorte que son image, vue à travers une lentille (l_8) , soit droite. En déplaçant (l_8) transversalement à son axe optique, on constate que l'image de l'objet se déplace dans le même sens que la lentille. La lentille (l_8) est-elle convergente ou divergente ? Justifier votre réponse.

Si l'image se déplace dans le même sens que la lentille, cela veut dire qu'elle se trouve entre l'objet et la lentille : la lentille (l_8) est donc divergente.

2. Relations de conjugaison et de grandissement.

a. Relation de conjugaison de Newton.

Construction de l'image $A'B'$:



Le foyer image F' est le symétrique de F par rapport à O .

Grandissement transversal : $\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$

Nous en déduisons la relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'}$

b. Relation de conjugaison de Descartes.

$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = (\overline{OA} - \overline{OF}) \cdot (\overline{OA'} - \overline{OF'}) = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} - \overline{OF} \cdot \overline{OA'} - \overline{OF'} \cdot \overline{OA} + \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'}$

Nous en déduisons la relation $-\overline{OF'} \cdot \overline{OA'} + \overline{OF'} \cdot \overline{OA} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ qui devient, en divisant par $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} \cdot \overline{OF'}$, la relation de conjugaison de Descartes :

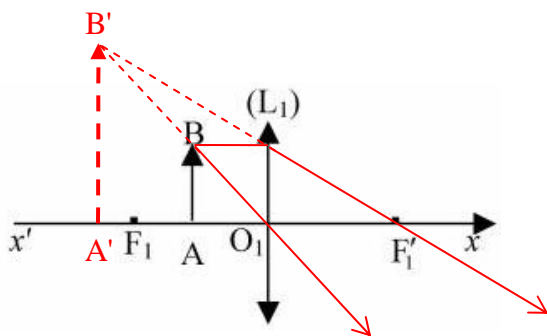
$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

Expression du grandissement : $\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

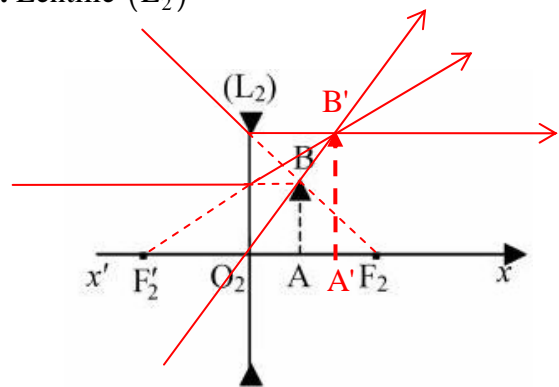
3. Correspondance objet-image pour des lentilles minces convergente et divergente.

a. Construction géométrique.

a.1. Lentille (L₁)



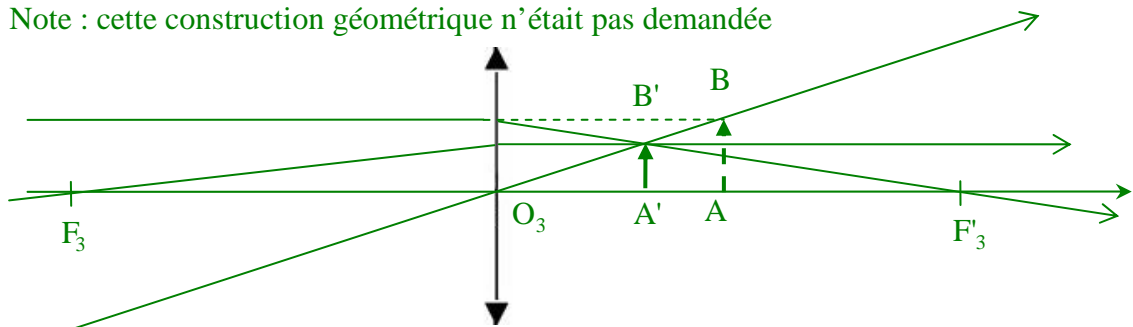
a.2. Lentille (L₂)



b. Position de l'image A'B' et grandissement transversal

b.1. La lentille (L₃) est convergente, de distance focale image +30 cm. Le positionnement de AB est tel que $\overline{O_3A} = 15$ cm. La position de A' sera donnée par la valeur de $\overline{F'_3A'}$.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



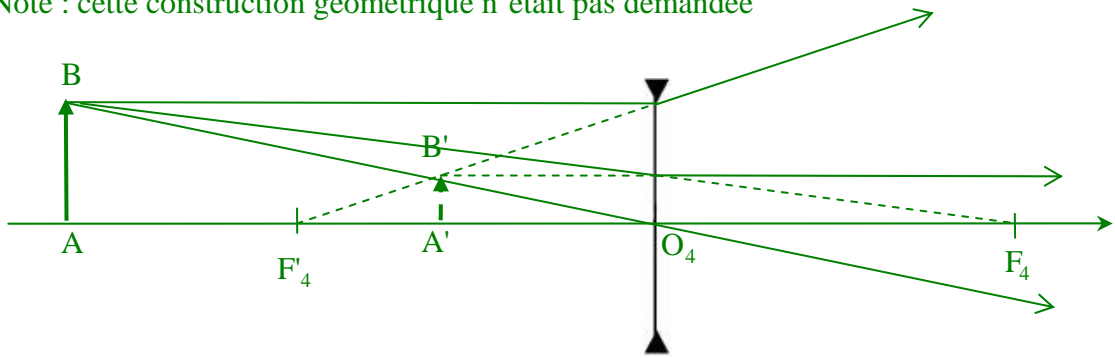
D'après la relation de conjugaison de Newton : $\overline{F'_3A'} = -\frac{f_3'^2}{\overline{F_3A}} = -\frac{f_3'^2}{\overline{O_3A} - \overline{O_3F_3}} = -\frac{f_3'^2}{\overline{O_3A} + f_3'}$

Application numérique : $\overline{F'_3A'} = -\frac{30^2}{15+30} = -20$ cm ; $\Gamma = -\frac{\overline{F'_3A'}}{f_3'} = +\frac{2}{3}$.

L'image est réelle et droite.

b.2. La lentille (L_4) est divergente, de distance focale image -30 cm. Le positionnement de AB est tel que $\overline{AF'_4} = 20$ cm. La position de A' sera donnée par la valeur de $\overline{O_4A'}$.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



D'après la formule de conjugaison de Descartes :
$$\frac{1}{\overline{O_4A'}} = \frac{1}{\overline{O_4F'_4}} + \frac{1}{\overline{O_4F'_4} + \overline{F'_4A}}$$

Et donc
$$\overline{O_4A'} = \frac{\overline{O_4F'_4}(\overline{O_4F'_4} - \overline{AF'_4})}{2\overline{O_4F'_4} - \overline{AF'_4}} = \frac{-30 \times (-30 - 20)}{-2 \times 30 - 20} = -\frac{75}{4} = -18,75 \text{ cm}$$

Grandissement :
$$\Gamma = \frac{\overline{O_4A'}}{\overline{O_4A}} = \frac{\overline{O_4A'}}{\overline{O_4F'_4} - \overline{AF'_4}} = \frac{-18,75}{-30 - 20} = +0,37$$

L'image est virtuelle et droite.

4. Système réfracteur : la lunette de Galilée

a. Nature distances focale des lentilles.

La lentille (\mathcal{L}_1) est convergente, de distance focale image $f'_1 = \frac{1}{V_1} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$

La lentille (\mathcal{L}_2) est divergente, de distance focale image $f'_2 = \frac{1}{V_2} = -0,05 \text{ m} = -5 \text{ cm}$

b. La lunette est de type « afocal »

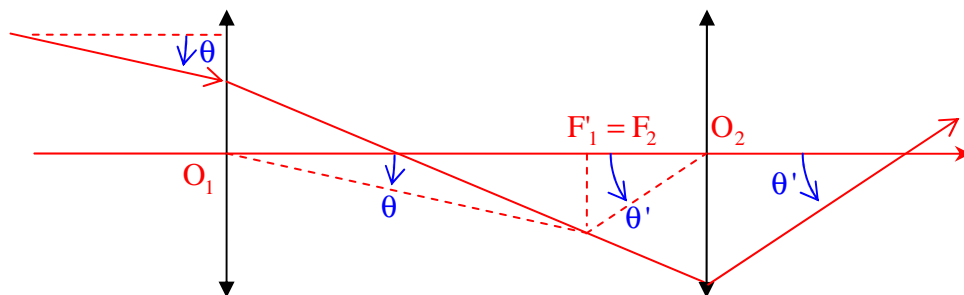
b.1. Préciser la position relative des deux lentilles, la valeur de la distance $d = \overline{O_1O_2}$ et l'intérêt d'une lunette afocale.

Le foyer image F'_1 de (\mathcal{L}_1) doit coïncider avec le foyer objet F_2 de (\mathcal{L}_2).

La distance d est alors : $d = f'_1 + f'_2 = 20 - 5 = 15 \text{ cm}$

L'intérêt d'une lunette afocale réside dans le confort de l'observation : l'œil doit alors accommoder à l'infini.

b.2. Dessiner, dans les conditions de Gauss, la marche d'un rayon lumineux incident, issu d'un point objet à l'infini, faisant un angle θ avec l'axe optique et émergent sous l'angle θ' .



b.3. En déduire le grossissement (ou grandissement angulaire) de cette lunette en fonction des angles θ et θ' , puis des distances focales f_1' et f_2' . Valeur du grossissement ?

$$\text{Grossissement : } G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_1'}{f_2'} = -4$$

c. Un astronome amateur utilise cette lunette, normalement adaptée à la vision d'objets terrestres, pour observer deux cratères lunaires : Copernic (diamètre : 96 km) et Clavius (diamètre : 240 km). **Rappel :** Distance Terre – Lune : $D_{TL} = 384\,000$ km.

c.1. L'astronome voit-il ces deux cratères lunaires :

- à l'œil nu ? (Acuité visuelle : 3×10^{-4} rad)
- à l'aide de cette lunette ? Justifier vos réponses.

$$\text{Copernic : } \theta = \frac{96}{384\,000} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ rad} < 3 \times 10^{-4} \text{ rad, invisible à l'œil nu}$$

$$\theta' = G\theta = 10^{-3} \text{ rad} > 3 \times 10^{-4} \text{ rad, visible à l'aide de la lunette}$$

$$\text{Clavius : } \theta = \frac{240}{384\,000} = 6,2 \times 10^{-4} \text{ rad} > 3 \times 10^{-4} \text{ rad, visible à l'œil nu}$$

$$\theta' = G\theta = 2,5 \times 10^{-3} \text{ rad} > 3 \times 10^{-4} \text{ rad, a fortiori visible à l'aide de la lunette}$$

c.2. La planète Vénus, de 12 150 km de diamètre, occultera Jupiter (de diamètre 145 800 km) le 22 novembre 2065.

Notre astronome amateur (qui sera certainement confirmé), pourra-t-il observer à l'œil nu ou à l'aide de sa lunette le disque jovien occulté par Vénus ? Dans cette configuration, la distance Terre-Vénus sera $D_{TV} = 45 \times 10^6$ km.

$$\theta = \frac{12150}{45 \times 10^6} = 2,7 \times 10^{-4} \text{ rad} < 3 \times 10^{-4} \text{ rad : Jupiter sera vu à l'œil nu comme un point.}$$

$$\theta' = G\theta = 10,8 \times 10^{-4} \text{ rad} > 3 \times 10^{-4} \text{ rad : Jupiter sera vu dans la lunette comme un disque.}$$

Électromagnétisme (CCP 2007 MP)

I. CONDUCTEURS – CONDENSATEURS – CAPACITES

1. Conducteurs – Propriétés.

a. Distinction entre conducteur métallique et isolant ?

Dans un conducteur métallique existent des électrons de conduction non liés aux atomes tandis que dans un isolant les électrons sont liés aux atomes.

Les métaux, le corps humain et l'eau du robinet (chargée d'ions) sont des conducteurs électriques. Les plastiques, le verre et l'eau pure sont des isolants (l'eau pure est très légèrement conductrice).

b. Conducteur en équilibre électrostatique.

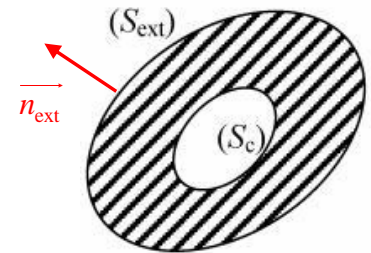
Un conducteur est en équilibre électrostatique s'il ne s'y produit aucun courant. Dans un tel conducteur, le champ électrique \vec{E}_i est nul, la densité volumique de charge ρ_i est nulle et le potentiel électrostatique V_i est uniforme et constant.

Si l'on apporte des charges excédentaires à un tel conducteur, elles se placent en surface définissant en chaque point une densité surfacique de charge σ telles que le champ électrique intérieur reste nul.

c. Conducteur métallique creu.

Dans une telle cavité, $\vec{E}_c = \vec{0}$, $\rho_c = 0$, $\sigma_c = 0$ et V_c est uniforme et constant, de même valeur que le potentiel du conducteur.

Si l'on ajoute des charges excédentaires, celles-ci se place sur la surface extérieure du conducteur.



d. Théorème de Coulomb.

Énoncé : Étant donné un conducteur placé dans le vide et un point M de sa surface extérieure, le champ électrique en un point M_{ext} extérieur au conducteur, immédiatement voisin de M, est orthogonal à la surface et a pour valeur algébrique le rapport entre la densité surfacique de charge σ au point M et la permittivité du vide ϵ_0 .

Formulation : \vec{n}_{ext} étant le champ de vecteur normal à la surface et dirigé vers l'extérieur,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$$

2. Conducteurs – Capacités.

a. Expression de la capacité : $C = \frac{Q}{V}$

Remarque : il faut bien entendu préciser, cela n'est pas fait dans l'énoncé, que le potentiel est choisi nul à l'infini. C'est une condition nécessaire pour pouvoir parler de la capacité d'un conducteur seul dans l'espace.

b. Calcul de capacités de conducteurs.

b.1. Conducteur plan.

Cette question n'a ni queue ni tête : comment peut-on envisager un conducteur plan à l'équilibre électrostatique, qui ne soit porteur de charges que sur une seule face ? La symétrie du conducteur implique que les deux faces soient également chargées. La symétrie impose aussi que la densité surfacique σ ne soit fonction que de la distance au centre du disque, mais en aucun cas cette densité surfacique ne saurait être uniforme à l'équilibre électrostatique : le pouvoir des pointes se traduira par une densité de charge supérieure à la périphérie du disque qu'en son centre.

Si l'on fait l'hypothèse que les charges sont uniformément réparties sur une seule face, alors $Q_1 = \pi R_1^2 \sigma_1$, mais le potentiel créé par ces charges n'est pas uniforme sur la surface du disque, il ne peut s'agir d'un conducteur et il est absurde de parler d'une « capacité ».

b.2. Conducteur cylindrique.

La densité surfacique de charge ne saurait être uniforme que si la longueur l du conducteur est très grande par rapport au rayon R_2 du cylindre, de telle sorte que l'on puisse négliger les « effets de bord ». Pour $l \gg R_2$, nous avons alors : $Q_2 = 2\pi R_2 l \sigma_2$.

Nous ne savons calculer le potentiel que dans le cas d'un conducteur cylindrique de longueur infinie, mais dans ce « problème d'école » nous sommes en présence de charges à l'infini et le potentiel ne peut en aucun cas être choisi nul à l'infini. **Il est donc impossible de définir la capacité (même linéique) d'un conducteur cylindrique seul dans l'espace.**

Note : Je n'ai pas connaissance de la façon dont ces deux questions absurdes qui incitaient les étudiants à dire des bêtises ont pu être notées.

b.3. Conducteur sphérique.

Cette fois il était inutile de préciser que la densité surfacique est uniforme : il s'agit d'une nécessité en réponse à la symétrie sphérique.

Nous avons alors $Q_3 = 4\pi R_3^2 \sigma_3$.

Le théorème de Gauss nous permet de calculer le champ électrique à l'extérieur de la sphère, identique au champ qui serait dû à une charge ponctuelle Q_3 placée au centre O_3 de la sphère, soit :

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{r^2} \vec{e}_r = \frac{R_3^2 \sigma_3}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Le potentiel se calcule alors par circulation du champ :

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \vec{E}_3 \cdot \vec{dr} = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{r^2} dr = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r}$$

À la surface de la sphère, le potentiel a pour valeur $V_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3}$ et l'on en déduit l'expression de la capacité de la sphère conductrice seule dans l'espace :

$$C_3 = \frac{Q_3}{V_3} = 4\pi\epsilon_0 R_3$$

3. Condensateurs – Propriétés.

a. Qu'appelle-t-on condensateur électrique ?

Un condensateur électrique est un ensemble de deux conducteurs dont l'un est sous l'influence totale de l'autre, c'est-à-dire que toutes les lignes de champ issues de l'un arrivent sur l'autre. C'est le cas, en particulier, lorsqu'un conducteur est situé dans une cavité d'un autre conducteur.

b. Parmi les condensateurs (plans, cylindriques, sphériques), citer trois types de condensateurs usuels.

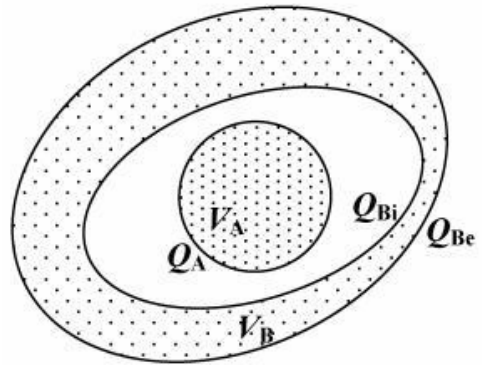
Quel est le sens de la question ? Doit-on parler de différentes technologies usuelles ? Par exemple en répondant :

- Les condensateurs à air : deux simples plaques métalliques en regard.
- Les condensateurs de technologie « mylar » ou « céramique », de faibles capacités.
- Les condensateurs chimiques, polarisés, dont les capacités peuvent être plus importantes.

c. Théorème de Gauss

Énoncé : Étant donnée une répartition quelconque de charges électriques dans le vide, le flux sortant $\Phi_{\vec{E}}$ du champ électrique à travers une surface fermée quelconque S est égal au rapport de la charge électrique Q_{int} intérieure à la surface S par la permittivité du vide ϵ_0 .

$$Formulation : \Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



4. Condensateurs – Capacités.

a. Relation entre les charges Q_A et Q_{Bi} .

D'après le théorème des éléments de surface correspondants, les charges portées par les surfaces A et Bi sont opposées : $Q_A = -Q_{Bi}$.

b. Condensateur.

La charge du condensateur est égale à la charge de l'une de ses électrodes, par exemple $Q = Q_A$.

La capacité C est alors définie comme étant fondamentalement positive : $C = \frac{Q_A}{V_A - V_B}$

c. Détermination de capacités.

c.1. Condensateur plan.

Sans démonstration, donc : $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$ (Note : assurez-vous que vous sauriez le démontrer !)

Application numérique : La valeur de ϵ_0 n'est pas donnée dans l'énoncé, mais l'on sait que

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \text{ avec } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \text{ et } c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$C = \frac{\pi R^2}{\mu_0 c^2 e} = \frac{\pi (6 \times 10^{-2})^2}{4\pi \times 10^{-7} \times (3 \times 10^8)^2 \times 2,5 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{-11} = 40 \text{ pF}$$

$$\text{Charge du condensateur : } Q = CV = 4 \times 10^{-11} \times 150 = 6 \times 10^{-9} \text{ C} = 6 \text{ nC}$$

c.2. Condensateur cylindrique.

Note : Nous ne savons faire ce calcul que dans le cas où la hauteur h est très grande par rapport à R_2 , de telle sorte que les « effets de bords » puissent être négligés. Bien que cela ne soit pas précisé dans l'énoncé, nous ferons cette hypothèse.

Si l'on néglige les effets de bord, le condensateur ainsi formé présente une symétrie d'invariance par translation parallèle à l'axe des cylindres et d'invariance par rotation autour de cet axe, comme si les cylindres étaient infinis. Soit, en coordonnées cylindriques : $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$

Appliquons le théorème de Gauss sur une surface fermée constituée d'une surface latérale cylindrique coaxiale aux conducteurs et de hauteur h et de « couvercles » circulaires : le flux sortant d'une telle surface se réduit au seul flux $2\pi rh E_r(r)$ à travers la surface latérale, tandis que la charge intérieure est égale à Q_1 . Le théorème de Gauss s'exprime donc ainsi :

$$\phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = 2\pi rh E_r(r) = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Et nous en déduisons l'expression du champ électrique entre les armatures du condensateur :

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 rh} \vec{e}_r$$

La différence de potentiel s'exprime par l'opposé de la circulation du champ :

$$V_1 - V_2 = - \int_{R_2 \rightarrow R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Nous en déduisons l'expression de la capacité du condensateur cylindrique idéalisé sans effets de bord :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Dans le cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, nous pouvons exprimer $\ln \frac{R_2}{R_1}$ par un développement

limité au premier ordre et écrire : $\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right) = \frac{e}{R_1} + o\left(\frac{e}{R_1}\right)$.

Nous en déduisons : $C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 h}{e} = \epsilon_0 \frac{S_1}{e}$

Commentaire : dans cette limite, les courbures sont très faibles et le condensateur est alors assimilable à un condensateur plan.

c.3. Condensateur sphérique.

Du fait de la symétrie sphérique du problème, nous savons *a priori* que le potentiel est une fonction scalaire de la seule variable r . En l'absence de charges volumiques, le potentiel $V(r)$ est solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Nous en déduisons que $r^2 \frac{dV}{dr} = K$ et donc, par intégration : $V(r) = K \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{K}{r} + C^{te}$.

Dès lors, le champ électrique a pour expression $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$. Par application du théorème de Coulomb, nous pouvons écrire : $-\frac{K}{R_1^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2 \epsilon_0}$ et donc :

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q_1}{C_3}$$

D'où l'expression de la capacité du condensateur sphérique : $C_3 = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Enfin, dans le cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, la capacité C_3 prend la forme approchée :

$$C_3 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1(R_1 + e)}{e} \approx \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{e} = \epsilon_0 \frac{S_1}{e}$$

Commentaire : Les courbures étant très faibles, nous retrouvons l'expression de la capacité d'un condensateur plan.

II. CONDENSATEUR SPHERIQUE : Système Terre-ionosphère

1. Exprimer le champ électrostatique

Comme nous l'avons déjà vu à la question I.4.c.3., le champ électrostatique a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+z)^2} \vec{e}_r$$

2. Potentiel et capacité

L'expression de la différence de potentiel, déjà vue à la question I.4.c.3., est :

$$V(R) - V(R+z) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+z} \right)$$

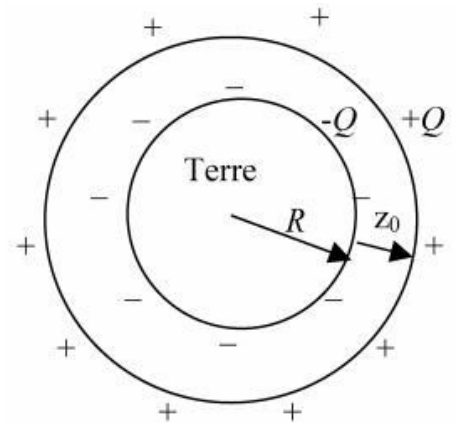
Avec $V(R) = 0$, cela donne : $V(R+z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{R(R+z)}$

Nous en déduisons l'expression de la capacité : $C = 4\pi\epsilon_0 R \left(1 + \frac{R}{z_0} \right)$

3. Applications numériques

Avec $z_0 = 60 \text{ km}$ et $R = 6000 \text{ km}$, nous sommes bien dans l'approximation $R \gg z_0$ qui permet de considérer qu'il s'agit d'un condensateur plan : $C \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{z_0} = \epsilon_0 \frac{S}{z_0}$

L'énergie électrostatique a pour expression $W_{el} = \frac{1}{2} CV^2 = 2\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{z_0} V^2$



Au niveau du sol, le champ électrique a pour valeur $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r = -\frac{CV}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r \approx -\frac{V}{z_0} \vec{e}_r$

Applications numériques : $C \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{z_0} = \frac{1}{9 \times 10^9} \frac{(6 \times 10^6)^2}{60 \times 10^3} = 0,067 \text{ F}$

$$W_{el} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times 0,067 \times (360 \times 10^3)^2 = 4,32 \times 10^9 \text{ J} = 4,32 \text{ GJ}$$

$$|\vec{E}| = \frac{V}{z_0} = \frac{360000}{60000} = 6,0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

4. Charge de la Terre

La densité surfacique se déduit du champ par le loi de Coulomb $\sigma = \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0 |\vec{E}|$ et donc $-Q = 4\pi R^2 \sigma = \epsilon_0 E_r = -4\pi\epsilon_0 R^2 |\vec{E}|$.

Applications numériques : $\sigma = -\frac{1}{\mu_0 c^2} |\vec{E}| = -\frac{6}{4\pi \times 10^{-7} (3 \times 10^8)^2} = -5,3 \times 10^{-11} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$

$$-Q = -\frac{4\pi}{\mu_0 c^2} R^2 |\vec{E}| = -2,4 \times 10^4 \text{ C} = -24 \text{ kC}$$

5. Lors d'un orage...

Les nouvelles valeurs numériques sont : $|\vec{E}_1| = \frac{V}{z_0} = \frac{10^8}{10^3} = 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\mu_0 c^2} |\vec{E}_1| = -\frac{10^5}{4\pi \times 10^{-7} (3 \times 10^8)^2} = -0,88 \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$-Q_1 = -\frac{4\pi}{\mu_0 c^2} R^2 |\vec{E}_1| = -0,4 \times 10^9 \text{ C} = -0,4 \text{ GC}$$

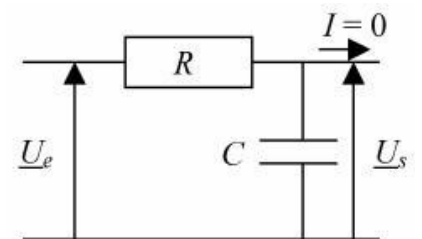
Lors d'un orage, les éclairs correspondent à des décharges électriques très rapides.

III. CONDENSATEUR PLAN : Circuit RC (en quoi ces condensateurs sont-ils plans ?)

1. Circuit RC : Filtre du 1^{er} ordre.

a. Nature du filtre.

En basse fréquence, le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, le courant dans la résistance est nul et la tension est donc transmise. En haute fréquence, le condensateur équivaut à un fil et la sortie est donc court-circuitée : la tension de sortie est nulle. Il s'agit d'un filtre passe-bas du premier ordre.



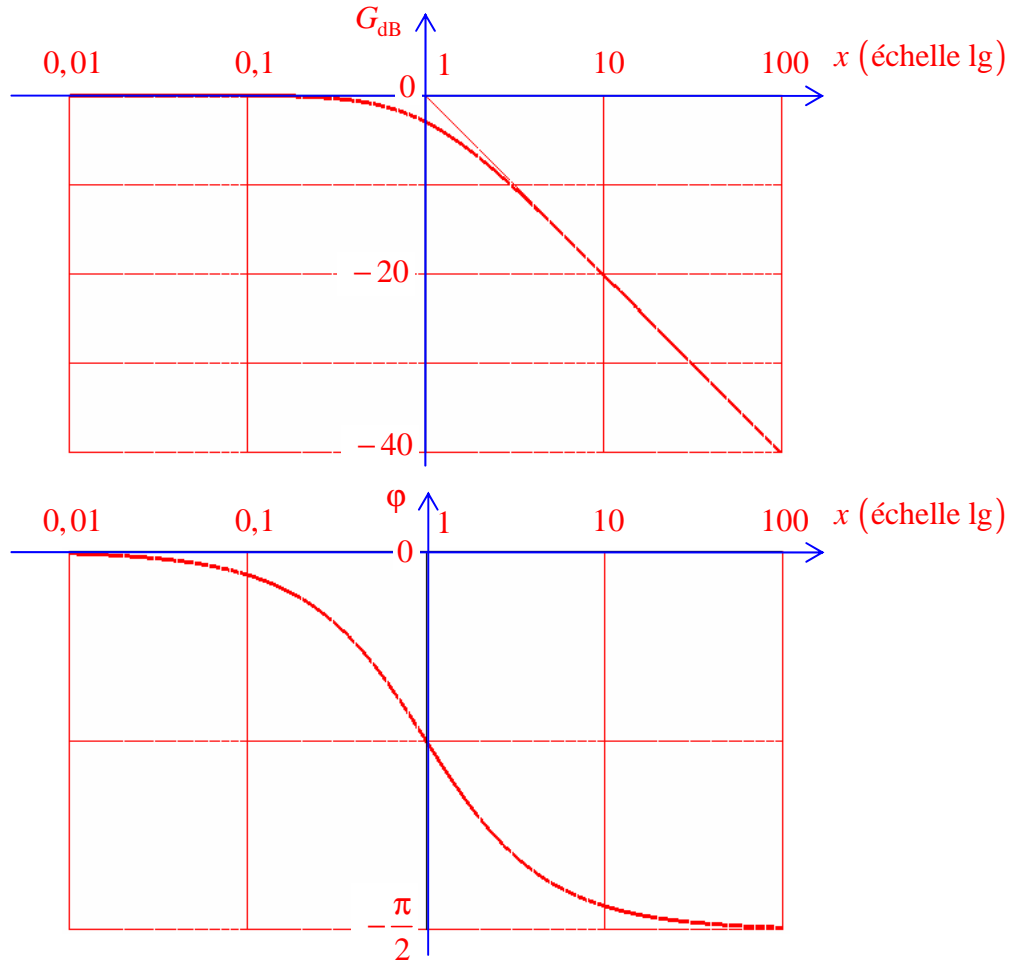
b. Fonction de transfert.

Par division de tension : $H = \frac{1}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + jx}$ avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$

c. Diagramme de Bode.

En haute fréquence, $H \sim \frac{1}{jx}$ soit :

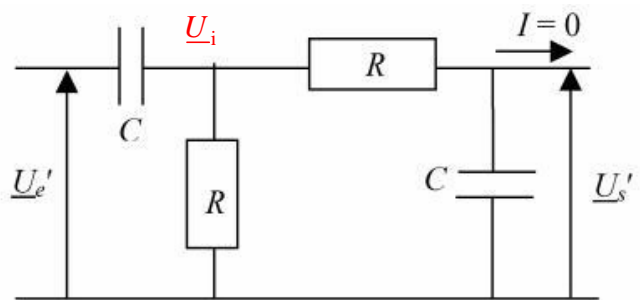
$$\begin{cases} G_{dB} \approx -20 \lg x \text{ ce qui correspond à une pente de l'asymptote de } -20 \text{ dB/décade} \\ \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



2. Circuit RC : Filtre du 2^{ème} ordre.

a. Nature du filtre

En basse fréquence, les condensateurs équivalent à des interrupteurs ouverts, le courant d'entrée est nul et la tension n'est donc pas transmise. En haute fréquence, les condensateurs équivalent à des fils et la sortie est donc court-circuitée : la tension de sortie est nulle. Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre.



b. Fonction de transfert.

Par division de tension, la tension de sortie s'exprime comme une fraction de la tension

intermédiaire \underline{U}_i :

$$\underline{U}'_s = \underline{U}_i \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{\underline{U}_i}{1 + jRC\omega} = \frac{\underline{U}_i}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{\underline{U}_i}{1 + jx}$$

Cette tension intermédiaire s'exprime en appliquant en ce nœud le théorème de Millman :

$$\left(jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) \underline{U}_i = \frac{U'_s}{R} + jC\omega \underline{U}'_e \quad \text{soit} \quad (2 + jx) \underline{U}_i = \underline{U}'_s + jx \underline{U}'_e = (2 + jx)(1 + jx) \underline{U}'_s$$

Ce qui devient $H' = \frac{\underline{U}'_s}{\underline{U}'_e} = -\frac{jx}{1 - (2 + jx)(1 + jx)} = \frac{jx}{1 + 3jx - x^2}$

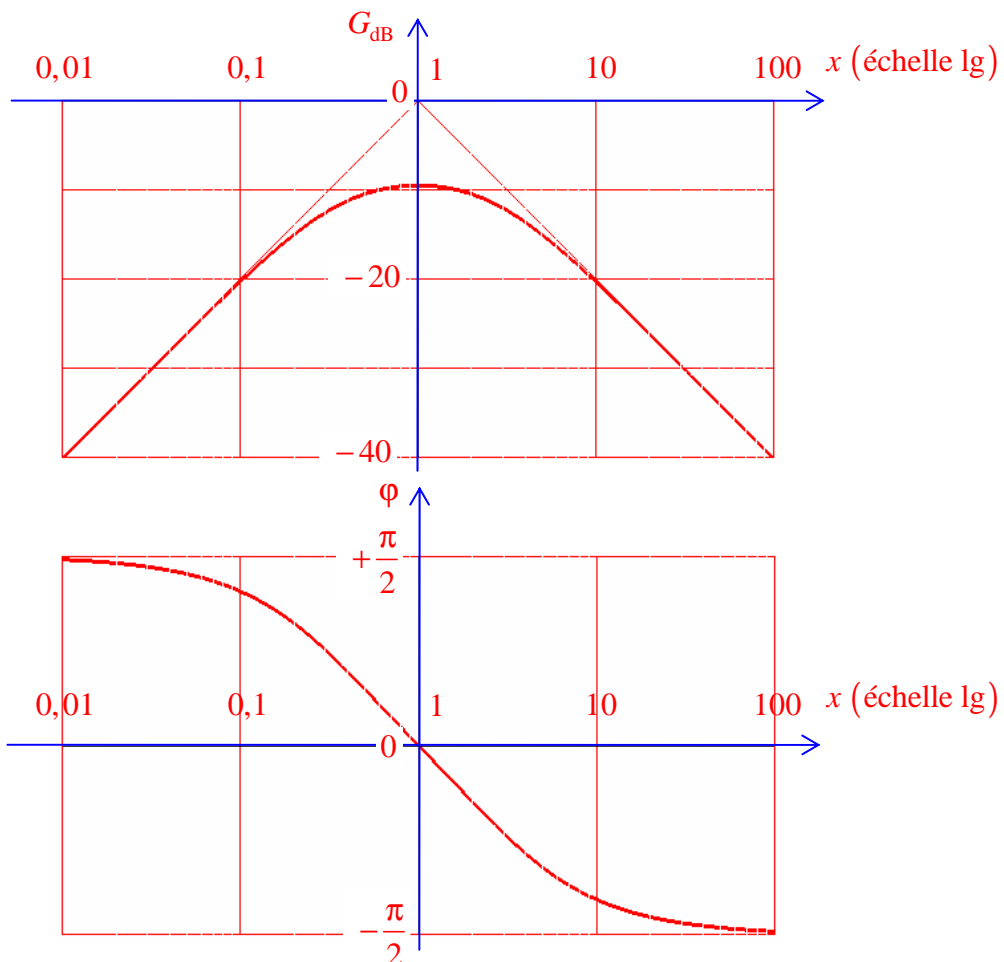
c. Diagramme de Bode.

En basse fréquence, $H \sim jx$ soit :

$$\begin{cases} G_{dB} \approx +20 \lg x \\ \phi \rightarrow +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

En haute fréquence, $H \sim \frac{1}{jx}$ soit :

$$\begin{cases} G_{dB} \approx -20 \lg x \\ \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



d. Pulsations de coupure à -3 dB, bande passante.

Pour $x=1$, nous avons $G_{\max} = \frac{1}{3}$. Le gain en décibel est diminué de 3 dB lorsque le gain est divisé par $\sqrt{2}$, pour les valeurs de x solutions de l'équation : $G = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-x\right)^2 + 9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Ce qui s'écrit : $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2 = 9$, soit $\frac{1}{x}-x = \pm 3$ ou encore $x^2 \pm 3x - 1 = 0$.

Nous avons affaire à deux équations du second degré admettant chacune une racine positive :

$$x_1 = \frac{\sqrt{13}-3}{2} = \frac{\omega_1}{\omega_0} \text{ et } x_2 = \frac{\sqrt{13}+3}{2} = \frac{\omega_2}{\omega_0} \quad (\text{Remarque : } \omega_1\omega_2 = \omega_0^2)$$

La bande passante a pour expression : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \left(\frac{\sqrt{13}+3}{2} - \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\omega_0 = 3\omega_0 = \frac{3}{RC}$

IV. CONDENSATEUR CYLINDRIQUE : Câble coaxial.

1. Équation de Maxwell-Faraday sous forme locale.

En régime sinusoïdal et en coordonnées cylindriques, l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit, le champ électrique étant radial :

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \theta} \vec{e}_z = \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial z} \exp(j\omega t) \vec{e}_\theta = -j\omega \vec{B}$$

Le champ \vec{B} , comme le suggère l'énoncé, est donc bien orthoradial et a pour expression $\vec{B} = B_\theta \vec{e}_\theta$,

avec $B_\theta = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial z} \exp(j\omega t)$

2. Équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

L'intégration de cette relation sur une surface S délimitée par un contour fermé C donne le théorème d'Ampère dans le cas magnétostatique et le « théorème d'Ampère généralisé » dans le cas général. Il convient alors de prendre en compte les « courants de déplacement ».

$$\iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{n}_+ dS = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \underbrace{\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}_+ dS}_{\text{Courant réel}} + \mu_0 \underbrace{\iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n}_+ dS}_{\text{Courant de déplacement}}$$

Dans le cas présent, la densité de courant de déplacement est radiale et son flux est nulle à travers la surface S . Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit donc $2\pi\rho \underline{B}_\theta = \mu_0 I_m(z) \exp(j\omega t)$ et l'on en déduit :

$$\underline{B} = \mu_0 \frac{I_m(z)}{2\pi\rho} \exp(j\omega t) \vec{e}_\theta$$

3. Équation de Maxwell-Ampère sous forme locale.

La densité de courant en volume étant nulle en tout point (sauf bien sûr sur les cylindres conducteurs où cette densité est infinie), l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot } \underline{\underline{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t}, \text{ soit : } -\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \underline{\underline{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\theta) \underline{\underline{e}}_z = -\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \underline{\underline{e}}_\rho = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \underline{\underline{e}}_\rho$$

Soit : $-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} = \frac{j\omega}{c^2} E_\rho$, ce qui s'écrit ici :

$$\underline{\underline{E}}_\rho = -\frac{\mu_0 c^2}{j\omega} \frac{1}{2\pi\rho} \frac{dI_m(z)}{dz} \exp(j\omega t)$$

4. Onde de courant.

Nous avons déjà démontré que : $\underline{\underline{B}}_\theta = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial E_\rho}{\partial z} = \mu_0 \frac{I_m(z)}{2\pi\rho} \exp(j\omega t)$.

En fonction du courant, cette relation s'écrit : $\frac{d^2 I_m}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} I_m = 0$

$I_m(z)$ est solution d'une équation différentielle harmonique dont une solution est effectivement

$$\underline{\underline{I}}_m(z) = I_0 \exp(-jkz), \text{ en posant } k = \frac{\omega}{c}.$$

5. Champs réels.

Nous en déduisons : $\underline{\underline{E}}_\rho = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi\rho} \exp(j(\omega t - kz))$ et $\underline{\underline{B}}_\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \exp(j(\omega t - kz))$

Ces expressions correspondent aux champs réels :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi\rho} \cos(\omega t - kz) \underline{\underline{e}}_\rho \text{ et } \underline{\underline{B}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \cos(\omega t - kz) \underline{\underline{e}}_\theta$$

Il s'agit donc d'une onde progressive cylindrique pour laquelle nous pouvons définir un vecteur d'onde $\underline{\underline{k}} = k \underline{\underline{e}}_z$. Notons que le trièdre $(\underline{\underline{k}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{B}})$ est direct, comme dans le cas d'une onde plane.

Notons que le rapport $\left| \frac{\underline{\underline{E}}}{\underline{\underline{B}}} \right|$ est égal à la vitesse de la lumière, comme dans le cas d'une onde plane. En bref, cette onde a *localement* une structure locale d'onde plane.

6. Vecteur de Poynting.

Par définition : $\underline{\underline{S}} = \frac{\underline{\underline{E}} \wedge \underline{\underline{B}}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi^2 \rho^2} (\cos(\omega t - kz))^2 \underline{\underline{e}}_z$.

La valeur moyenne d'un cosinus au carré étant égale à $\frac{1}{2}$, nous avons donc $\langle \underline{\underline{S}} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 \rho^2} \underline{\underline{e}}_z$.

Le flux de $\langle \underline{\underline{S}} \rangle$ correspond à la puissance transportée par l'onde.

$$\mathcal{P} = \iint_{\text{couronne}} \langle \underline{\underline{S}} \rangle \cdot \underline{\underline{e}}_z dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 \rho^2} \times 2\pi\rho d\rho = \frac{\mu_0 c I_0^2}{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$