

CCP - Physique 1 - Spé PC

Partie I – Thermodynamique

1- Nombre de foyers alimentés par le gazoduc

$$\delta Q = cm\Delta T \text{ d'où } 1 \text{ th} = 4,18 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 1 \text{ soit } 1 \text{ th} = 4,18 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Pouvoir calorifique massique $\delta Q/m$ du gaz naturel :

$$\frac{\delta Q}{m} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta Q}{V} \text{ or pour un gaz parfait } \rho = pM/(RT) \text{ d'où } \boxed{\frac{\delta Q}{m} = \frac{RT}{pM} \cdot \frac{\delta Q}{V}} \text{ avec } \delta Q/V = 10 \text{ th/m}^3.$$

$$\text{AN : } \frac{\delta Q}{m} = \frac{8,314 \cdot 293}{10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-3}} \cdot 10 \cdot 4,18 \cdot 10^6 \text{ soit } \underline{\delta Q/m = 63,6 \cdot 10^5 \text{ kJ/kg}}$$

Nombre de foyers alimentés N : on pose P = 3kW

$$\text{On a : } NP = D \cdot \delta Q/m \text{ d'où } \boxed{N = \frac{D}{P} \cdot \frac{\delta Q}{m}}$$

$$\text{AN : } \underline{N = 53000}$$

2- Etude de la détente

2.1 Température du méthane à la sortie du détendeur

Détente de Joule-Thomson. Elle permet de classer les fluides : parfaits ou réels (refroidissement)

Premier principe pour un fluide en écoulement permanent en absence d'échange thermique et de travail

$$\text{autre que celui des forces de pression : } \frac{d}{dt}(h + e_c + e_p) = 0.$$

On néglige l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur, d'où $\frac{dh}{dt} = 0$ donc h = cst soit

$$\boxed{h_1 = h_2}$$

Température à la sortie : par lecture sur la courbe (i) avec h = 1120 kJ/kg, on trouve $\boxed{T_2 = 265 \text{ K}}$

2.2 Vitesses du gaz en amont et en aval du détendeur

Avec i = 1 ou 2 : débit massique D = $\rho_i S c_i$ avec S section de la canalisation S = πr^2 et $\rho_i = \frac{p_i M}{RT_i}$

$$\text{D'où } \boxed{c_i = \frac{DRT_i}{\pi^2 p_i M}}. \text{ AN : } \underline{c_1 = 0,248 \text{ m/s et } c_2 = 5,84 \text{ m/s.}}$$

Rmq : on peut lire sur la courbe (iii) le volume massique $v_2 = 1/\rho_2$.

Le terme représentant l'énergie cinétique est négligeable devant celui de l'enthalpie. L'hypothèse est donc vérifiée..

2.3 Réchauffement du gaz en aval du détendeur

a. Capacité thermique du méthane

$$c_p = \frac{dh}{dT}. \text{ On utilise la courbe (i) : } c_p \text{ représente le coefficient directeur. } c_p = \frac{(1200 - 1025) \cdot 10^3}{300 - 220}$$

$$\text{soit } \boxed{c_p = 2,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

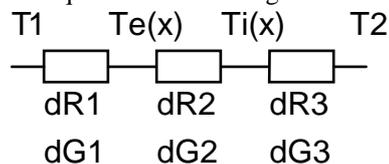
b. Etude du transfert thermique

Analogie avec la loi d'Ohm :

puissance thermique \Leftrightarrow intensité

température \Leftrightarrow différence de potentiel

On a la même puissance thermique à travers l'élément de longueur dx, donc la même intensité, ce qui équivaut à un montage en série :



dR1, dR2 et dR3 : résistances thermiques et dG1, dG2 et dG3 : conductances thermiques.

$$dG1 = \frac{d\Phi_{eTh}}{T_1 - T_e(x)} = h_e dS_1 ; dG2 = \frac{d\Phi_{th}}{T_e(x) - T_i(x)} = \frac{K \cdot dS_2}{e} ; dG3 = \frac{d\Phi_{iTh}}{T_i(x) - T(x)} = h_i dS_3$$

En régime permanent : $d\Phi_{eTh} = d\Phi_{iTh} = d\Phi_{th}$ et on suppose $dS_1 = dS_2 = dS_3 = dS$

$$d'où : T_1 - T(x) = (T_1 - T_e(x)) + (T_e(x) - T_i(x)) + (T_i(x) - T(x))$$

$$\text{soit : } T_1 - T(x) = d\Phi_{th} \cdot \left(\frac{1}{dG1} + \frac{1}{dG2} + \frac{1}{dG3} \right)$$

$$\text{On a alors avec } dS = 2\pi(r + e/2)dx : \boxed{d\Phi_{th} = \frac{T_1 - T(x)}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{K} + \frac{1}{h_i}} \cdot 2\pi(r + e/2)dx}$$

$$\text{D'où la valeur de } G : \boxed{G = \frac{2\pi(r + e/2)}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{K} + \frac{1}{h_i}}} \cdot \text{AN : } \underline{G = 31,7 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}}$$

c. Evolution de la température du gaz le long de la canalisation

$$\text{Bilan énergétique : } \boxed{D \cdot dh = d\Phi_{th}}$$

$$\text{D'où : } D \cdot c_p \cdot dT(x) = G \cdot (T_1 - T(x)) \cdot dx \text{ soit } \frac{dT(x)}{T_1 - T(x)} = \frac{G}{D \cdot c_p} dx$$

$$\text{Pour } x = 0, T(0) = T_2. \text{ D'où : } \boxed{T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \exp\left(-\frac{G}{D \cdot c_p} x\right)}$$

Soit L la valeur de x pour laquelle la température du gaz est revenue à 0°C ($T_3 = 273 \text{ K}$)

$$\boxed{L = \frac{Dc_p}{G} \ln\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_3}\right)} \text{ soit AN : } \underline{L = 45 \text{ m}}$$

3- Récupération de la puissance

3.1 Détente idéalement réversible : le régime est permanent donc le couple exercé par le fluide sur la turbine est égale au moment du couple résistant. On peut inverser le fonctionnement et obtenir un compresseur si le couple moteur devient légèrement supérieur à celui exercé par le fluide.

3.2 Entropie du liquide saturant

$$\text{On a : } s_v - s_L = \frac{h_v - h_L}{T_{eq}} \text{ soit avec les données : } \boxed{s_L = 9,13 - \frac{820 - 342}{128} = 5,39 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

3.3 Etat du méthane à la sortie

Détente adiabatique réversible donc isentropique : $s = \text{cst} = 9,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

$$\text{D'où à 3 bar et 128 K, } x_v = \frac{s - s_L}{s_v - s_L} = \frac{9,1 - 5,39}{9,13 - 5,39}, \text{ soit } \underline{x_v = 99,2\%}$$

Le méthane est pratiquement tout sous forme vapeur.

3.4 Puissance mécanique récupérée

Toujours le premier principe pour un fluide en écoulement en considérant le méthane sous forme de gaz: $D(h_2 - h_1) = -P_m$ avec P_m puissance mécanique récupérée par l'opérateur extérieur.

$$\text{D'où } P_m = -2,5 \cdot (820 - 1120) \cdot 10^3 \text{ soit } \underline{P_m = 750 \text{ kW}}$$

3.5 Installations non réalisées par GDF

Puissance trop faible pour que l'installation soit rentable.

Partie II - Mécanique des fluides

0- Etude cinématique de deux écoulements particuliers

0.1 Ecoulement tourbillonnaire

Écoulement orthoradial donc $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta$.

Pour $r > a$, on calcule la circulation du vecteur vitesse sur une ligne de courant (cercle de centre O et de rayon r)

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi r v = \iint \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} = \gamma \pi a^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta} \quad \text{avec} \quad \underline{\Gamma = \gamma \pi a^2}$$

Distribution électromagnétique : champ magnétique créé par un fil infini rectiligne de section un disque de rayon a et parcouru par une intensité constante.

(Rmq : c'est aussi un champ à divergence nulle)

0.2 Ecoulement d'un doublet

a. Etude de la source seule S

Écoulement radial : $\vec{v}_S = v_{rS} \vec{e}_{rS}$.

Calcul du débit volumique par unité de longueur: $D = 2\pi r_S v$ d'où $\boxed{\vec{v}_S(M) = \frac{D}{2\pi r_S} \vec{e}_{rS}}$

Potentiel $\varphi_S(M)$: $\vec{v}_S(M) = \text{grad}(\varphi_S(M))$ d'où $\boxed{\varphi_S(M) = \frac{D}{2\pi} \ln(r_S) + \text{cst}}$

b. Etude du puits

$$\boxed{\vec{v}_P(M) = -\frac{D}{2\pi r_P} \vec{e}_{rP}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_P(M) = -\frac{D}{2\pi} \ln(r_P) + \text{cst}'}$$

c. Association du puits et de la source

Superposition des écoulements : $\varphi(M) = \varphi_S(M) + \varphi_P(M)$.

On choisit l'origine des potentiels en O soit $\text{cst} + \text{cst}' = 0$.

D'où $\boxed{\varphi(M) = \frac{D}{2\pi} \ln\left(\frac{r_S}{r_P}\right)}$

or $r_S = r \left(1 - \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2}\right)^{1/2}$ et $r_P = r \left(1 + \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2}\right)^{1/2}$

d'où avec des DL au 1^{er} ordre, $\ln\left(\frac{r_S}{r_P}\right) = -\frac{2d}{r} \cos \theta$

d'où $\boxed{\varphi(M) = -\frac{Dd}{\pi} \cos \theta}$ ou $\boxed{\varphi(M) = -\frac{H}{2\pi} \cos \theta}$ avec $\underline{H = 2Dd}$

Vitesse en coordonnées cylindriques : $\vec{v}(M) = \text{grad } \varphi(M)$

$$\text{d'où : } \boxed{\vec{v}(M) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H \cdot \cos \theta}{2\pi^2} \text{ selon } \vec{e}_r \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{H \cdot \sin \theta}{2\pi^2} \text{ selon } \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ selon } \vec{e}_z \end{cases}}$$

d. Comparaison avec une distribution électromagnétique : champ électrostatique créé par un doublet filiforme de charges linéiques λ et $-\lambda$.

1- Ecoulement autour d'un cylindre en rotation

1.1 Etude cinématique

a. Justifier ces expressions

Superposition des trois écoulements, d'où $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta + \frac{H \cos \theta}{2\pi^2} \vec{e}_r + \frac{H \sin \theta}{2\pi^2} \vec{e}_\theta + U \vec{e}_x$

Avec $\vec{e}_x = \cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$, on a :

$$\vec{v} = \begin{cases} U \left(1 + \frac{H}{2\pi U r^2} \right) \cos \theta \text{ selon } \vec{e}_r \\ -U \left(1 - \frac{H}{2\pi U r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \text{ selon } \vec{e}_\theta \end{cases}$$

On retrouve les expressions proposées en posant : $R^2 = -\frac{H}{2\pi U}$

b. Interprétation du modèle avec respect des conditions limites

Le tourbillon tient compte de la rotation du cylindre dans un fluide au repos très loin du cylindre.

Le doublet modélise l'écoulement du fluide autour du cylindre fixe.

Vitesse angulaire : la vitesse (orthoradiale) d'un point à la surface du cylindre est la même que celle de la couche de fluide en contact avec l'écoulement dû au tourbillon, d'où :

- vitesse d'un point à la surface du cylindre : $v = R\omega$

- vitesse orthoradiale de l'écoulement tourbillonnaire : $v = \frac{\Gamma}{2\pi R}$

d'où $\omega = \frac{\Gamma}{2\pi R^2}$

1.2 Mise en mouvement de l'air par le cylindre

La mise en mouvement du cylindre est impossible si le fluide est parfait ou non visqueux.

1.3 Etude dynamique

a. Comparer la vitesse

Le fluide est incompressible, donc le vecteur vitesse est à flux conservatif.

Les lignes de champ sont plus resserrées pour $y > R$ que pour $y < -R$, donc la vitesse dans le domaine $y > R$ est supérieure à celle du domaine $y < -R$, soit $|v|(y > R) > |v|(y < -R)$.

b. Signe de Γ et sens de rotation du cylindre

On a en $\theta = \pi/2$: $v(y > R) = U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$

et en $\theta = -\pi/2$: $v(y < -R) = U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$

Pour respecter la condition du a), Γ doit être négatif. Alors le cylindre tourne dans le sens horaire.

c. Existence de points d'arrêt et position

L'observation du tracé fait apparaître 2 points d'arrêt du fluide à la surface du cylindre (ce qui n'est pas toujours le cas) pour -30° et -150° .

Pour $r = R$ et $v_\theta = 0$, on a : $|\Gamma| = 4\pi UR \sin \theta_a$ avec $\theta_a = 30^\circ$

d. Composante F_x et moment par rapport à l'axe Oz

Du fait de la symétrie de la figure par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), on peut associer à chaque force élémentaire dF_x agissant en M ($r = R, \theta$) la force élémentaire $-dF_x$ agissant en M' ($r = R, \pi - \theta$).

D'où la composante sur l'axe Ox de la résultante de l'action de l'air sur le cylindre est nulle : $F_x = 0$

Même raisonnement pour les moments qui s'annulent deux à deux. (paradoxe de d'Alembert)

e. Pression à la surface du cylindre

Utilisation du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point à l'infini et un point à la

surface du cylindre à $z = \text{cst}$: $P_0 + \frac{\rho U^2}{2} = P(\theta) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2U \sin \theta \right)^2$

soit $P(\theta) = P_0 + \frac{\rho}{2} \left[U^2 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2U \sin \theta \right)^2 \right]$

f. Composante F_y

On a : $d\vec{F} = -P(\theta).dS.\vec{e}_r$ avec $dS = hR.d\theta$.

$dF_y = d\vec{F}.\vec{e}_y$ soit $dF_y = -P(\theta).R.h.\sin\theta.d\theta$ d'où par intégration $F_y = Rh \int_0^{2\pi} P(\theta).\sin\theta.d\theta$

d'où $F_y = -\rho U h \Gamma$ ou $F_y = 4\pi\rho h R U^2 \sin\theta_a$ (ici $\Gamma < 0$, la force est dirigée vers les y croissants)

Applications : effet Magnus (effet lifté ou coupé très utilisé par els sportifs !!!)

AN : $F_y = 5513 \text{ N}$

g. Viscosité du fluide

On peut calculer le nombre de Reynolds (environ 10^6).

Pour un faible nombre de Reynolds, il a formation d'une couche limite laminaire. Lorsque celui-ci augmente, la couche limite se décolle avec formation de tourbillon. Le régime devient turbulent.

On lève le paradoxe de d'Alembert.

2 - Ecoulement de l'air autour d'une aile modélisée

2.1 Analogie avec la magnétostatique

symétrie impaire

discontinuité : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ avec $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ normale à la surface orientée de 1 vers 2.

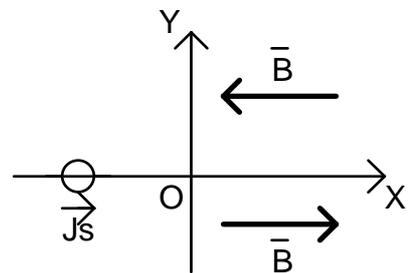
Le champ magnétique et le champ des vitesses vérifient les mêmes équations différentielles (divergence et rotationnel).

Ce sont deux champs antisymétriques.

Donc une analogie de solution est possible.

Le champ des vitesses présente une symétrie impaire.

On peut aussi écrire : $\vec{v}_{T2} - \vec{v}_{T1} = a\vec{w} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ ou $\vec{v}_{T2} - \vec{v}_{T1} = -\gamma(X)\vec{e}_X$ (1)



2.2 Composante tangentielle $v_{T,t,i}(X)$

Par antisymétrie : $v_{T,t,i}(X) = -v_{T,t,e}(X)$

2.3 $v_{T,t,e}(X)$ et $v_{T,t,i}(X)$ en fonction de $\gamma(X)$

A l'aide de l'équation (1) : $v_{T,t,e} - v_{T,t,i} = -\gamma(X)$, on a : $v_{T,t,e} = -\frac{\gamma(X)}{2}$ et $v_{T,t,i} = \frac{\gamma(X)}{2}$

2.4 $v_{t,e}(X)$ et $v_{t,i}(X)$ en fonction de U et de $\gamma(X)$

On a : $\vec{U} = U.\cos\alpha.\vec{e}_X + U.\sin\alpha.\vec{e}_Y$ d'où $\begin{cases} v_{t,e}(X) = -\frac{\gamma(X)}{2} + U\cos\alpha \\ v_{t,i}(X) = \frac{\gamma(X)}{2} + U\cos\alpha \end{cases}$

Or α est petit, donc ces résultats deviennent : $\begin{cases} v_{t,e}(X) = -\frac{\gamma(X)}{2} + U \\ v_{t,i}(X) = \frac{\gamma(X)}{2} + U \end{cases}$

Composantes normales de la vitesse de la nappe tourbillonnaire

Les composantes normales de la vitesse totale sont nulles (le fluide ne peut pas traverser la plaque),

donc $v_{n,e}(X) = 0$ et $v_{n,i}(X) = 0$ or $\begin{cases} v_{n,e}(X) = v_{T,n,e}(X) + U\sin\alpha \\ v_{n,i}(X) = v_{T,n,i}(X) + U\sin\alpha \end{cases}$ d'où $\begin{cases} v_{T,n,e}(X) = -U\alpha \\ v_{T,n,i}(X) = -U\alpha \end{cases}$

2.5 Allure des courbes

On a : $v_{T,t,e} = U\alpha\sqrt{\frac{L-X}{X}}$ et $v_{T,t,i} = -U\alpha\sqrt{\frac{L-X}{X}}$.

La représentation de $v_{T,t,e}(X)$ ou $v_{T,t,i}(X) = -v_{T,t,e}(X)$ a assez peu d'intérêt (courbe rouge).
 La courbe verte $v_{t,e}(X)$ montre l'absence de point d'arrêt pour l'extrados.
 La courbe jaune $v_{t,i}(X)$ montre l'existence d'un point d'arrêt pour l'intrados.
 (Courbes représentées avec : $L = 1,5$ m, $\alpha = 0, 2$ (soit 12°) et $U = 1$).

Points d'arrêt :

$v_{t,e}(X_{ae}) = 0$ donne $\gamma(X) = 2U$: cette équation ne présente aucune solution physiquement acceptable. Il n'y a donc pas de point d'arrêt sur l'extrados.

$v_{t,i}(X_{ai}) = 0$ donne $\gamma(X_{ai}) = -2U$ soit

$$\sqrt{\frac{L - X_{ai}}{X_{ai}}} = \frac{1}{\alpha}$$

d'où $X_{ai} = \frac{L}{1 + \frac{1}{\alpha^2}}$. Comme α est

$$\text{petit, } \boxed{X_{ai} \approx L\alpha^2}$$

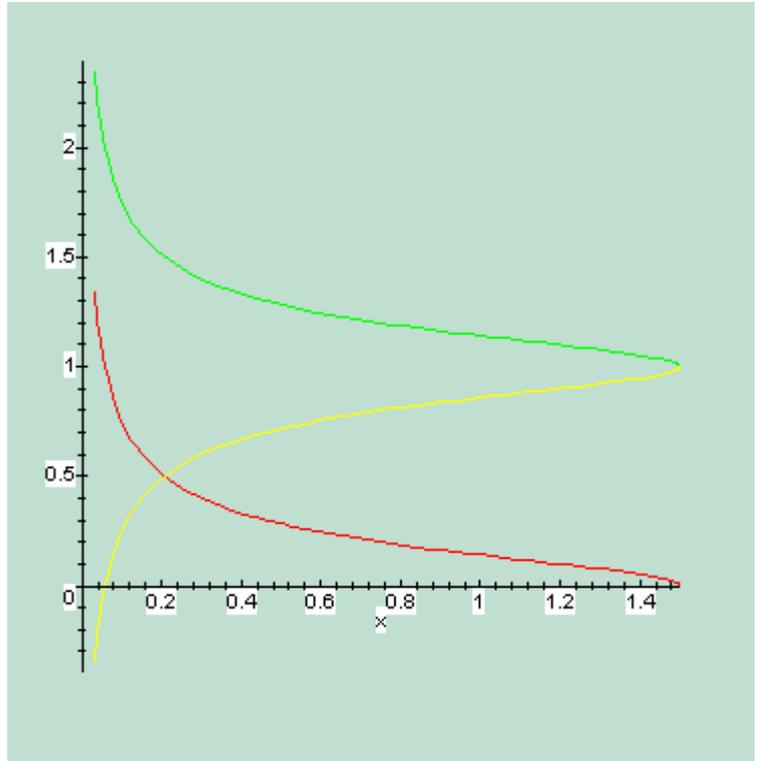
2.6 Commentaire de la photographie

On observe bien le point d'arrêt de l'intrados et pas sur l'extrados.

Sur l'extrados, la vitesse diminue lorsque X augmente (les lignes de courant s'écartent).

Sur l'intrados, après le point d'arrêt, la vitesse augmente lorsque X augmente.

Problème en $X = L$: les deux vitesses ne convergent pas vers la même valeur U .



2.7 Expressions des pressions

Au niveau de l'extrados : utilisation du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant :

$$P_0 + \frac{\rho U^2}{2} = P_e(X) + \frac{\rho}{2} (U - \gamma(X)/2)^2 \text{ soit } \boxed{P_e(X) = P_0 + \frac{\rho}{2} (U\gamma(X) - \gamma^2(X)/4)}$$

Au niveau de l'intrados : utilisation du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant :

$$P_0 + \frac{\rho U^2}{2} = P_i(X) + \frac{\rho}{2} (U + \gamma(X)/2)^2 \text{ soit } \boxed{P_i(X) = P_0 - \frac{\rho}{2} (U\gamma(X) + \gamma^2(X)/4)}$$

Remarque : On peut négliger le second ordre en γ .

2.8 Composante F_Y

On a $dF_Y = (p_i(X) - p_e(X)) \cdot h \cdot dX$ soit $dF_Y = -\rho \cdot U \cdot \gamma(X) \cdot h \cdot dX$

$\gamma(X)$ est négatif, donc $|\gamma(X)| = -\gamma(X)$ d'où $dF_Y = \rho \cdot U \cdot |\gamma(X)| \cdot h \cdot dX$ soit $\boxed{F_Y = \rho h U |\Gamma|}$

ou encore $\boxed{F_Y = \pi \rho h L \alpha U^2}$ On obtient le même genre de réponse qu'avec le cylindre : même dépendance, seul un facteur de forme (coefficient numérique) change.

2.1 Application

Pour que l'avion décolle : $F_Y \cos \alpha > mg$

En négligeant le cosinus de l'angle α , on trouve :

$$\boxed{U > \sqrt{\frac{mg}{\pi \rho h L \alpha}}}$$

AN : $U > 32,8$ m/s ou $U > 118$ km/h

2.2 Interprétation : décollement de la couche limite.

