

**CCP 2000**  
**FILIÈRE PSI**  
**PHYSIQUE 1**

**CHAMP ÉLECTROSTATIQUE, ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE**

1. Calcul de l'énergie électrostatique

1.1  $W = q \cdot V$

1.2.  $V_j = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$  donc  $W_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$

1.3. L'énergie de la distribution s'écrit  $W = \sum_{\text{paires (i,j)}} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$  pour ne pas

compter deux fois la même paire. Or  $V(M_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$  donc  $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(M_i)$

1.4. Passage à la distribution continue:  $q_i \longrightarrow \rho(M) d\tau$  et  $\sum_{i=1}^n \longrightarrow \iiint_{\Omega}$  d'où

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(M) \cdot V(M) \cdot d\tau$$

1.5  $\rho(M) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$  d'après l'équation de Maxwell-Gauss donc

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E}) \cdot V(M) \cdot d\tau$$

donc on peut écrire  $\frac{dW(M)}{d\tau} = \operatorname{div}(\vec{E}) \cdot V(M)$ . Cette relation peut s'écrire en tout point de l'espace où règne un champ électrostatique  $\vec{E}$  [dérivant du potentiel  $V(M)$ ] sans nécessairement connaître la distribution de charge source de ce champ.

1.6. On a  $\operatorname{div} [V(M) \cdot \vec{E}] = V(M) \cdot \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V = V(M) \cdot \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E}^2$  d'après la définition de  $V$ .

Donc  $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\Omega} [\operatorname{div}(V(M) \cdot \vec{E}) + \vec{E}^2] \cdot d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iint_{\Sigma} V(M) \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\Omega} \vec{E}^2 d\tau$

1.7. Envisageons une surface  $\Sigma$  sphérique de centre O (intérieur à  $\Omega$ ). Si le rayon R de cette sphère est très grand devant la longueur caractéristique de  $\Omega$ , le potentiel s'écrit  $V(M) = \frac{A}{R}$  et le champ  $\vec{E} = \frac{B}{R^2} \vec{u}_r$  en tout point de  $\Sigma$ .

Donc  $\iint_{\Sigma} V(M) \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{A}{R} \cdot \frac{B}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi A \cdot B}{R}$  et  $\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \iint_{\Sigma} V(M) \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \right) = 0$ . Alors

$\lim_{R \rightarrow \infty} W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\text{ESPACE}} \vec{E}^2 d\tau$  et  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$ .

1.8.  $W = \frac{1}{2}CV^2$  avec  $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$  donc  $W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{SV^2}{e}$ . Comme le volume entre les électrodes est  $\tau = S.e$ , on peut écrire  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{W}{\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{V^2}{e^2}$  en considérant la densité volumique d'énergie comme uniforme. On reconnaît  $E = \frac{V}{e}$  champ électrostatique dans le condensateur, d'où  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ . On retrouve bien l'expression obtenue en 1.7. On en déduit que l'énergie électrostatique du condensateur est « contenue » dans l'espace entre les électrodes.

2.1a.  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde, de module  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et de vecteur unitaire  $\vec{n}$  colinéaire à la direction de propagation dans le sens de cette propagation.

2.1b. L'onde est plane et progressive donc  $\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$  soit:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} (\vec{n} \wedge \vec{u}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t).$$

2.1c. Par définition  $w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

soit, en moyenne,  $\langle w \rangle = 2 \cdot \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$ .

2.1d. Par définition,  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  d'où  $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{n}$ .  $\vec{\Pi}$  est le vecteur densité surfacique de flux d'énergie électromagnétique.

2.1e. Avec  $w = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , on obtient  $\frac{\Pi}{w} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c \epsilon_0 E_0^2} = c$ . Ce rapport est la vitesse de propagation de l'énergie qui est donc aussi égal à la vitesse de propagation de la phase.

2.2a. Il n'y a pas de perte donc la puissance qui traverse une demi-sphère de rayon  $r$  quelconque ne dépend pas de  $r$ : c'est la puissance émise par la source. Donc  $P_0 = P \cdot 2\pi R^2$  soit

$$P = \frac{P_0}{2\pi R^2} \text{ à la distance } R.$$

2.2b. Par définition de  $\vec{\Pi}$ ,  $P = \iint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \Pi \cdot 2\pi R^2$  d'où, en moyenne,  $\langle \Pi \rangle = P$ .

Comme  $R \gg \lambda \gg d$ , on peut assimiler le rayonnement à la distance  $R$  à une onde progressive plane. Avec les résultat de la question précédente, on déduit  $\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{P_0}{2\pi R^2}$  d'où

$$E_0 = \sqrt{\frac{P_0 \mu_0 c}{\pi R^2}}.$$

2.3a. Numériquement:  $E_0 = \sqrt{\frac{10^3 4\pi 10^{-7} 3 \cdot 10^8}{\pi}} \frac{1}{R} = \frac{\sqrt{12 \cdot 10^4}}{R}$  en  $V \cdot m^{-1}$  d'où  $E_0 = 3,46 \text{ mV} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour  $R = 1000 \text{ m}$  et  $E_0 = 3,46 \text{ } \mu\text{V} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour  $R = 1000 \text{ km}$ .

2.3b. Pour  $P_0 = 1 \text{ GW}$ ,  $E_0 = 3,46 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour  $R = 1000 \text{ m}$  et  $E_0 = 3,46 \text{ mV} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour  $R = 1000 \text{ km}$ .

2.3c. Dans un circuit intégré, les tensions sont de l'ordre du mV voire du V soit, pour une longueur de 1 cm, un champ de  $1 \text{ mV} \cdot \text{cm}^{-1}$  (voire  $1 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ ) ou . Il faut donc protéger ces circuits des surtensions de l'ordre de  $0,1 \text{ mV} \cdot \text{cm}^{-1}$  (voire  $100 \text{ mV} \cdot \text{cm}^{-1}$ ). C'est le cas de tous les cas étudiés ci-dessus sauf  $R = 1000 \text{ km}$  pour  $P_0 = 1 \text{ kW}$ .

2.3d. D'après les résultats précédents, on ne peut pas détecter la source de 1 kW à 1000 km.

3.1. Énergie d'un photon de fréquence  $\nu$ :  $E = h \nu$  ( $h$  constante de Planck).

$$3.2. \vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{n} = \frac{h}{\lambda} \vec{n} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \hbar \vec{k}.$$

3.3.a. L'énergie électromagnétique qui traverse une section  $dS$  pendant  $dt$  à la distance  $R$  est  $P(R) \cdot dS \cdot dt$ . Elle est égale à l'énergie des photons qui traversent cette section soit  $N(R) dS \cdot dt \cdot h\nu$ . D'où  $N(R) = \frac{P_0}{2\pi R^2 h\nu}$ .

$$3.3b.A.N. N = \frac{10^3}{2\pi (10^3)^2 6,63 \cdot 10^{-34} 10^{10}} = 2,4 \times 10^{19} \text{ photon} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2} \text{ à } R = 1000 \text{ m}.$$

3.4. Un photon incident possède la quantité de mouvement  $\vec{p}$ . Après le choc sur une paroi perpendiculaire à sa direction de propagation, il possède la quantité de mouvement  $-\vec{p}$ . Sa variation de quantité de mouvement est donc  $-2\vec{p}$ . La conservation de la quantité de mouvement entraîne que la paroi subit une variation  $2\vec{p}$  de sa quantité de mouvement ce qui se traduit par une force dans le sens de  $\vec{p}$ .

3.5a. Sur un élément  $dS$  de la paroi arrivent  $N(R) dS \cdot dt$  photons pendant  $dt$ . La variation de quantité de mouvement de la paroi est donc  $d\vec{p} = N(R) dS \cdot dt \cdot 2 \frac{h}{\lambda}$  soit la force  $d\vec{f} = N(R) \cdot 2 \frac{h}{\lambda} dS$  à laquelle correspond la pression  $p_R = N(R) \cdot 2 \frac{h}{\lambda} = \frac{P_0}{2\pi R^2} \frac{h\nu}{c}$  soit

$$p_R = \frac{P_0}{\pi R^2 c}$$

$$[p_R] = \frac{[F]}{[L]^2} \text{ et } \left[ \frac{P_0}{\pi R^2 c} \right] = \frac{[F][V]}{[L]^2[V]} = \frac{[F]}{[L]^2}. \text{ L'équation est homogène.}$$

Un écran parfaitement noir est absorbant donc la variation de quantité de mouvement due à un seul photon (qui n'est pas réfléchi) s'écrit  $\frac{h}{\lambda}$  d'où  $p_R = \frac{P_0}{2\pi R^2 c}$ .

L'écran parfaitement réfléchissant est le cas étudié ci-dessus donc  $p_R = \frac{P_0}{\pi R^2 c}$ .

3.5b. D'après ce qui précède, il faut choisir un écran réfléchissant pour augmenter  $p_R$ .

3.5c. A.N.  $p_R = \frac{10^3}{\pi(10^3)^2 3.10^8} = 1,0 \times 10^{-12}$  Pa à 1000 m et  $p_R = 1,0 \times 10^{-18}$  Pa à 1000 km.

3.6a. Le rendement du moteur est  $\eta = \frac{|W|}{Q}$  donc la puissance du moteur vérifie  $P_{MOT} = \eta \cdot P_{TH} = \eta \cdot P(R) \cdot S$ .

A.N.  $P_{MOT} = 0,2 \frac{10^3}{2\pi(10^3)^2} \cdot 1 = \underline{3,2 \cdot 10^{-5} \text{ W}}$ . Cette puissance permet d'exercer la force de sustentation  $F = \frac{100}{10^3} 3,2 \cdot 10^{-5} = 3,2 \cdot 10^{-6}$  N soit une masse  $m = \frac{F}{g} = \underline{3,25 \cdot 10^{-7} \text{ kg}}$  ou 0,325  $\mu\text{g}$ .

Ici l'écran optimal doit être noir pour absorber le plus d'énergie possible.

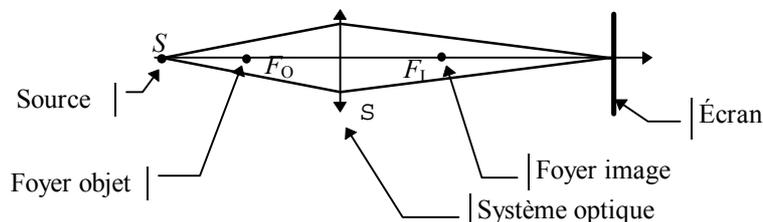
3.6b. Avec  $F = p_R \cdot S$  on obtient  $F = 10^{-12}$  N d'où  $m = 10^{-13}$  kg.

3.7. La force obtenue par la pression de radiation est moins grande mais ne suppose aucun dispositif supplémentaire (comme une turbine) dont la masse serait excessive.

3.8. Si toute la puissance de la source est concentrée sur l'écran, on a  $P = \frac{P_0}{S}$  d'où

$$\boxed{F = \frac{2P_0}{c \cdot S}} \quad \text{A.N. } F = \frac{2}{3} \cdot 10^{-5} \text{ N d'où } m_0 = \underline{6,8 \times 10^{-7} \text{ kg}}.$$

3.9. On veut que l'énergie lumineuse passe effectivement par l'image; celle-ci doit donc être réelle. On peut l'obtenir avec une lentille convergente en plaçant la source avant le foyer objet de le sens de la propagation.



3.10.  $\delta \leq d$

3.11. Comme l'angle  $\theta$  est très petit, on peut écrire  $\frac{\theta}{2} \approx \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\delta}{2R}$  d'où

$D = 1,22 \lambda \frac{R}{\delta}$ . La valeur maximale de  $\delta$  est  $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$  donc la valeur minimale de  $D$  est

$$\boxed{D_{MIN} = 1,22 \frac{c}{v} R \sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot S}}}$$

A.N.  $D = 1,22 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{10^3}{v} \sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot 1}} = \frac{3,24 \cdot 10^{11}}{v}$  d'où

$$\underline{D = 9,3 \text{ m}} \text{ pour } v = 35 \text{ GHz};$$

$$\underline{D = 32,4 \text{ m}} \text{ pour } v = 10 \text{ GHz};$$

$$\underline{D = 360 \text{ m}} \text{ pour } v = 900 \text{ MHz};$$

On constate que le diamètre de la pupille a une dimension irréalisable si la fréquence d'émission est trop basse.

## CALORIMÉTRIE, VARIATION D'ENTROPIE, ÉCHANGES DE CHALEUR

A.1. Le système thermodynamique est l'ensemble du calorimètre (avec ses accessoires) et de l'eau (liquide ou solide) qu'il contient. Il subit une transformation isobare (à la pression atmosphérique). Le premier principe peut s'écrire  $H_F - H_1 = Q$  pour chaque transformation.

De  $t = 0$  à  $t = t_1$ ,  $H_1 - H_0 = m_g \cdot L_F$  et  $Q_{01} = P(t_1 - t_0)$ .

De  $t = t_1$  à  $t = t_2$ ,  $H_2 - H_1 = (\mu + M) J (T_{VAP} - T_{FUS})$  et  $Q_{12} = P(t_2 - t_1)$

On en déduit 
$$L_F = \frac{(\mu + M) J (T_{VAP} - T_{FUS})}{m_g} \cdot \frac{(t_1 - t_0)}{(t_2 - t_1)}$$

A.2. De  $t_2$  à  $t_3$ ,  $H_3 - H_2 = \frac{M}{2} \cdot L_{VAP}$  et  $Q_{23} = P(t_3 - t_2)$ .

Comme  $P = \frac{(\mu + M) J (T_{VAP} - T_{FUS})}{(t_2 - t_1)}$ , on obtient 
$$L_V = \frac{2(\mu + M) J (T_{VAP} - T_{FUS})}{M} \cdot \frac{(t_3 - t_2)}{(t_2 - t_1)}$$

A.N.  $L_F = \frac{(200 \cdot 10^{-3} + 1) 4180 (100 - 0)}{100 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{(2)}{(30)} = \underline{334,4 \text{ kJ.kg}^{-1}}$ ;

$L_V = \frac{2 (200 \cdot 10^{-3} + 1) 4180 (100 - 0)}{1} \cdot \frac{(67,5)}{(30)} = \underline{2 257,2 \text{ kJ.kg}^{-1}}$ ;

$P = \frac{(200 \cdot 10^{-3} + 1) 4180 (100 - 0)}{(30 \cdot 60)} = \underline{278,7 \text{ W}}$ .

B.1. Le système S constitué des deux objets est isolé donc  $\Delta H = 0$ . Pour chaque objet de capacité calorifique  $C_P$ ,  $\Delta H_1 = C_P(T_F - T_1)$  et  $\Delta H_2 = C_P(T_F - T_2)$ . Comme  $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$ , on obtient  $C_P(2 T_F - T_1 - T_2) = 0$  d'où 
$$T_F = \frac{T_1 + T_2}{2}$$
.

B.2. Le passage de l'état final (les deux objets à  $T_F$ ) à l'état initial (les deux objets à des températures différentes) n'est pas possible spontanément: la transformation est donc irréversible.

B.3. L'entropie est extensive donc  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$  avec les notations précédentes. On connaît l'état initial et l'état final de chaque objet. L'entropie est une fonction d'état donc on peut envisager une transformation qui n'est pas la transformation réelle entre ces deux états.

On la choisit réversible pour pouvoir écrire  $\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_F} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_F} \frac{dH}{T} = \int_{T_1}^{T_F} C_P \frac{dT}{T} = C_P \ln\left(\frac{T_F}{T_1}\right)$ .

De même,  $\Delta S_2 = C_P \ln\left(\frac{T_F}{T_2}\right)$  d'où 
$$\Delta S = C_P \ln\left(\frac{T_F^2}{T_1 \cdot T_2}\right)$$
.

B.4. On a  $T_F^2 = \frac{1}{4}(T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 \cdot T_2)$ . Or  $(T_1 - T_2)^2 > 0$  soit  $(T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 \cdot T_2) > 0$ . On en déduit  $T_F^2 > T_1 \cdot T_2$  donc  $\Delta S > 0$ . Le système des deux objets étant isolé, son entropie ne peut qu'augmenter.

C.1. Comme ci-dessus, on imagine une transformation réversible entre l'état initial de la source chaude ( $T_0$ ) et son état final ( $T_C$ ) donc, puisque J ne dépend pas de T

$$\Delta S_C = \int_{T_0}^{T_C} \frac{\delta Q_C}{T} = \int_{T_0}^{T_C} \frac{dH_C}{T} = \int_{T_0}^{T_C} M.J \frac{dT}{T} = M.J \ln\left(\frac{T_C}{T_0}\right)$$

et de même  $\Delta S_F = \int_{T_0}^{T_F} \frac{\delta Q_F}{T} = \int_{T_0}^{T_F} \frac{dH_F}{T} = \int_{T_0}^{T_F} M.J \frac{dT}{T} = M.J \ln\left(\frac{T_F}{T_0}\right)$ .

Pour l'ensemble des deux sources  $\Delta S = M.J \ln\left(\frac{T_C \cdot T_F}{T_0^2}\right)$ .

C.2. On a  $\Delta S = 0$  si  $T_F \cdot T_C = T_0^2$ .

C.3. Notons  $T_F = T_0 - \Delta T$  avec  $\Delta T > 0$ . Alors  $T_C = \frac{T_0^2}{T_0 \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right)}$  que l'on développe au

deuxième ordre en  $T_C = T_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} + \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 + \dots\right)$ .

C.4.  $T_M = \frac{T_C + T_F}{2} = \frac{1}{2} \left( T_0 + \Delta T + T_0 \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 + \dots + T_0 - \Delta T \right) = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 + \dots\right)$  donc

$$\Delta T_M = T_M - T_0 = \frac{\Delta T^2}{2T_0}$$

C.5. On constate que la température moyenne augmente c'est-à-dire que  $T_C$  augmente plus que  $T_F$  ne diminue au cours du fonctionnement de la pompe. Le premier principe appliqué au fluide sur un cycle montre que la chaleur reçue par la source chaude et la somme de la chaleur fournie par la source froide et du travail fourni au fluide par le moteur. Comme les capacités thermiques des deux sources sont les mêmes, on aura  $T_C - T_0 > T_0 - T_F$ .

C.6. Par définition, l'efficacité d'une pompe à chaleur s'écrit  $\varepsilon = \frac{Q_C}{W}$  ( $Q_C$  est la chaleur reçue algébriquement par la source chaude et  $W$  le travail reçu par le fluide). Pendant la durée  $dt$ , le travail est  $\delta W = P_0 dt$  et  $\delta Q_C = \Lambda_C dT$  et comme  $\varepsilon$  est constant, on peut écrire  $\delta Q_C = \varepsilon \delta W$ . Comme  $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$ , on obtient  $\Lambda_C = \frac{\varepsilon P_0}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$ .

A.N.  $\Lambda_C = \frac{2,5 \cdot 400}{\left(\frac{2}{60}\right)} = 3 \times 10^4 \text{ J.K}^{-1}$ .

C.7.  $M = \frac{\Lambda_C}{J} = \frac{3 \cdot 10^4}{4180} = 7,2 \text{ kg}$ .

D.1. La capacité thermique de l'évaporateur est  $\Lambda$ . Pendant le refroidissement, il échange  $P_A$  avec l'extérieur et  $P_F$  avec le fluide donc  $(P_A + P_F) dt = \Lambda d\theta$ . Comme  $\frac{d\theta}{dt} = -a$ , il reste  $P_A + P_F = -a\Lambda$ . Au cours du réchauffement, le bilan s'écrit  $P_A + P_F + P_C = b\Lambda$ ;

Si la température ne varie pas pendant  $dT$ , alors  $b = 0$  donc  $P_C = -(P_A + P_F)$ . C'est la valeur particulière  $P_E$  de  $P_C$  cherchée donc  $P_E = -(P_A + P_F)$ .

Si les relations entre puissances et pentes sont linéaires, c'est-à-dire si  $\Lambda$  ne dépend pas de  $T$ , on peut écrire  $P_E = a \frac{-P_E + P_C}{b}$  d'où  $P_E = \frac{a \cdot P_C}{a + b}$ .

D.2. D'après ce qui précède,  $\Lambda = \frac{P_E}{a}$ .

$$\text{A.N. } P_E = \frac{0,16 \cdot 960}{0,16 + 0,08} = \underline{640 \text{ W}}; \quad \Lambda = \frac{640}{\left(\frac{0,16}{60}\right)} = \underline{2,4 \times 10^5 \text{ J.K}^{-1}}.$$

On définit le coefficient de performance de réfrigération par  $C_F = \frac{-Q_F}{W}$  soit pendant  $dt$ ,  $-\delta Q_F = C_F \delta W$  ou encore  $-\Lambda dT = C_F P_M dt$ . Comme  $\frac{d\theta}{dt} = -a$  pendant le refroidissement, il reste  $C_F = \frac{\Lambda a}{P_M}$ .

$$\text{A.N. } C_F = \frac{2,4 \cdot 10^5 \left(\frac{0,16}{60}\right)}{400} = \underline{1,6}.$$

D.3. Pendant  $dt$ ,  $dH = P_A dt$  avec  $dH = \Lambda d\theta$  donc  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{B}{\Lambda}(T_A - \theta)$  dont la solution est  $\theta(t) = T_A + A e^{-\frac{t}{\tau_R}}$  avec  $\tau_R = \frac{\Lambda}{B}$ .

D.4. En notant  $\theta_0$  la température en  $t = 0$ , instant d'arrêt de la machine, il vient  $\theta(t) = T_A - (T_A - \theta_0) e^{-\frac{t}{\tau_R}}$ .

D.5. La constante de temps du phénomène est  $\tau_R = \frac{\Lambda}{B}$ . La capacité thermique est proportionnelle au volume de l'évaporateur et  $B$  est proportionnel à la surface de contact avec l'extérieur (phénomène diffusivo-convectif). On peut prévoir que  $\tau_R$  est proportionnel à la longueur caractéristique de l'évaporateur.

Pour augmenter  $\tau_R$ , il faut augmenter  $\Lambda$  en augmentant la masse et la capacité thermique massique du liquide et diminuer  $B$  en améliorant l'isolation thermique des parois de l'évaporateur.

D.6. La température minimum  $\theta_M$  est atteinte lorsque  $a = 0$ . Alors  $P_A + P_C = 0$  d'où

$$B(T_A - \theta_M) - F(\theta_M - T_{LV}) = 0 \text{ d'où } \theta_M = \frac{B \cdot T_A + F \cdot T_{LV}}{B + F}.$$

D.7. Dans la phase de fonctionnement du compresseur, le liquide de l'évaporateur échange  $P_C$  avec le fluide frigorigène et  $P_A$  avec l'extérieur. Donc, la chaleur reçue pendant  $dt$  s'écrit

$$\delta Q = B(T_A - \theta_M)dt - F(\theta_M - T_{LV})dt.$$

La variation d'enthalpie du liquide est  $dH = \Lambda d\theta$ . Le premier principe  $dH = \delta Q$  conduit à l'équation différentielle  $\frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{F+B}{\Lambda}\theta(t) = \frac{F.T_{LV} + B.T_A}{\Lambda}$  dont la solution générale est  $\theta(t) = \frac{F.T_{LV} + B.T_A}{\Lambda} + Ae^{-\frac{t}{\tau_F}}$  avec  $\tau_F = \frac{\Lambda}{F+B}$ . On reconnaît  $\theta_M = \frac{B.T_A + F.T_{LV}}{B+F}$ .

En  $t = 0$ , on a  $\theta = \theta_+$  donc  $\theta_+ = \theta_M + A$  et la solution cherchée s'écrit donc:

$$\theta(t) = \theta_M + (\theta_+ - \theta_M)e^{-\frac{t}{\tau_F}}$$

D.8.  $\theta = \theta_-$  pour  $t = t_F$  tel que  $\theta_- = \theta_M + (\theta_+ - \theta_M)e^{-\frac{t_F}{\tau_F}}$  d'où  $t_F = \tau_F \ln\left(\frac{\theta_+ - \theta_M}{\theta_- - \theta_M}\right)$

D.9. Après l'arrêt du compresseur à  $t = t_F$ , la température vérifie l'équation établie en D.3. dont la solution peut s'écrire  $\theta(t) = T_A - (T_A - \theta_-)e^{-\frac{t}{\tau_R}}$  en prenant la nouvelle origine des temps à l'instant de l'arrêt. On aura alors  $\theta = \theta_+$  à l'instant  $t = t_R$  tel que  $\theta_+ = T_A - (T_A - \theta_-)e^{-\frac{t_R}{\tau_R}}$  d'où  $t_R = \tau_R \ln\left(\frac{T_A - \theta_-}{T_A - \theta_+}\right)$ .

D.10. Le compresseur consomme la puissance constante  $P_M$  de 0 à  $t_F$  puis s'arrête pendant  $t_R$ . La durée d'un cycle est  $t_F + t_R$  et la puissance moyenne consommée est

$$P_{\text{eff}} = \frac{P_M t_F}{t_F + t_R}$$

D.11.  $B = \frac{\Lambda}{\tau_R}$ . A.N.  $B = \frac{2,4 \cdot 10^5}{60 \cdot 3600} = 1,11 \text{ W.K}^{-1}$ .

D.12. On a vu  $P_F = -P_A - a\Lambda$  soit  $-F(\theta - T_{LV}) = -B(T_A - \theta) - a\Lambda$  d'où

$F = \frac{B(T_A - \theta) + a\Lambda}{\theta - T_{LV}}$ ; A.N.  $F = \frac{1,11(20 - (-5)) + \frac{0,16}{60} 2,4 \cdot 10^5}{(-5) - (-20)} = 44,5 \text{ W.K}^{-1}$ . On obtient

ensuite  $\theta_M = \frac{1,11 \cdot 293 + 44,5 \cdot 253}{1,11 + 44,5} = 254 \text{ K}$ ,  $\tau_F = \frac{2,4 \cdot 10^5}{44,5 + 1,11} = 5,3 \times 10^3 \text{ s} \approx 1,46 \text{ heures}$ ;

D.13.  $t_F = 5,3 \cdot 10^3 \ln\left(\frac{271 - 254}{268 - 254}\right) = 1020 \text{ s} = 17 \text{ minutes}$ .

$t_R = 2,16 \cdot 10^5 \ln\left(\frac{293 - 268}{293 - 271}\right) = 2,76 \times 10^4 \text{ s} = 7,67 \text{ heures}$ .

$P_M = \frac{400,971}{1020 + 2,76 \cdot 10^4} = 14,2 \text{ W} = 0,34 \text{ kWh/24h}$ .

*Pour toutes remarques, contacter*

J.M. DELORME Jean-Marie.Delorme@univ-orleans.fr

FX COQ Francois-Xavier.Coq@univ-orleans.fr