

**CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE
FILIÈRE PSI
PHYSIQUE 1**

PREMIER PROBLÈME

PRECESSION DE L'ORBITE DES SATELLITES DE LA TERRE

1) $V(r)$ ne dépend que de r donc son gradient est $\vec{\text{grad}} V(r) = \frac{dV}{dr} \hat{r}$ d'où $\frac{dV}{dr} = G \frac{m_0}{r^2}$

qui s'intègre en $V(r) = -G \frac{m_0}{r} + C$. Avec $V(r = \infty) = 0$, il vient $C = 0$ d'où $V(r) = -G \frac{m_0}{r}$.

2) Dans le cas du champ de gravitation, le théorème de Gauss s'écrit $\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dS = -4\pi G M_{\text{INT},\Sigma}$ où $M_{\text{INT},\Sigma}$ est la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ .

La distribution de masse étudiée ici est invariante par les symétries de la sphère donc le champ qu'elle crée est radial et ne dépend que de r . On choisit une surface de Gauss Σ sphérique, de centre O et de rayon r . Le flux de \vec{g} à travers Σ est donc $\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dS = 4\pi r^2 g$.

• $0 < r < R$: $M_{\text{INT},\Sigma} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ car ρ est uniforme. Comme $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, on a donc

$M_{\text{INT},\Sigma} = M \frac{r^3}{R^3}$. On en déduit $g(r) = -GM \frac{r}{R^3}$ puis $V(r) = \frac{1}{2} GM \frac{r^2}{R^3} + C$.

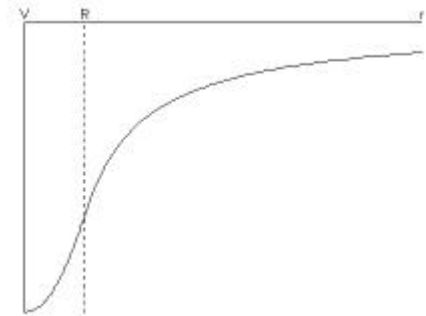
• $R < r$. $M_{\text{INT},\Sigma} = M$ donc $g(r) = -G \frac{M}{r^2}$ puis $V(r) = -G \frac{M}{r}$ en prenant toujours $V(r = \infty) = 0$.

La continuité de la fonction $V(r)$ en $r = R$ entraîne $C = -G \frac{M}{R} - \frac{1}{2} GM \frac{R^2}{R^3} = -\frac{3}{2} G \frac{M}{R}$.

Donc, pour $0 < r < R$, on peut écrire

$$V(r) = \frac{1}{2} G \frac{M}{R} \left[\frac{r^2}{R^2} - 3 \right].$$

On en déduit la courbe ci-contre :



3) Le référentiel T_0 est galiléen donc la loi de l'hydrostatique s'écrit $0 = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} p$ donc à l'intérieur de la Terre, il vient $\vec{\text{grad}} p = -\rho GM \frac{r}{R^3} \hat{r}$ soit

$$\frac{dp}{dr} \hat{r} = -\frac{3}{4\pi} GM^2 \frac{r}{R^6} \hat{r}.$$

Rem : On peut écrire aussi $\vec{\text{grad}} p = -\rho \vec{\text{grad}} V$ soit $\vec{\text{grad}} p(r) + \rho V(r) \vec{e}_r = \vec{0}$

4) On intègre en $p(r) = -\frac{3}{8\pi} GM^2 \frac{r^2}{R^6} + C$. Avec $p = 0$ pour $r = R$, il vient

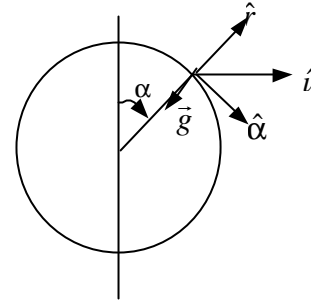
$$C = \frac{3}{8\pi} GM^2 \frac{R^2}{R^6} \text{ d'où } p(r) = \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^6} (R^2 - r^2).$$

Rem : l'équation $\vec{\text{grad}} p(r) + \rho V(r) = \vec{0}$ s'intègre en $p(r) + \rho V(r) = Cte = \rho V(R)$ d'où le résultat.

5) Au centre de la Terre, on a $r = 0$ donc $P_0 = \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$

A.N. $P_0 = \frac{3}{8\pi} \frac{(3,986 \cdot 10^{14})^2}{6,674 \cdot 10^{-11} (6378 \cdot 10^3)^4} = 1,7 \times 10^{11} \text{ Pa}$

6) La loi de l'hydrostatique doit s'appliquer dans le référentiel où le liquide est à l'équilibre c'est-à-dire ici le référentiel en rotation autour de \vec{k}_0 avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Ce référentiel n'est pas galiléen donc il faut introduire la densité volumique des forces d'inertie d'entraînement de la forme $\rho \omega^2 r \sin \alpha \hat{u}$



La loi s'écrit donc $\vec{0} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} p + \rho \omega^2 r \sin \alpha \hat{u}$.

Rem : on a encore :

$\rho \omega^2 r \sin \alpha \hat{u} = \rho \omega^2 \left[\frac{r \sin^2 \alpha}{r \sin \alpha \cos \alpha} \right] = \vec{\text{grad}} \left[\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha \right]$ donc la relation d'équilibre

peut s'écrire : $\vec{\text{grad}} \left[p(r) + \rho V(r) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha \right] = \vec{0}$ soit, après intégration :

$$p(r) + \rho V(r) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha = Cte$$

7) En projection dans la base $(O, \hat{r}, \hat{\alpha})$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho g + \rho \omega^2 r \sin^2 \alpha \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \rho \omega^2 r \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad \text{avec } g(r) = -GM \frac{r}{R^3}$$

La deuxième équation s'intègre en $p(r, \alpha) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha + f(r)$. Sa dérivée par rapport à r est $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \sin^2 \alpha + \frac{df}{dr}$ donc en identifiant avec la première composante, il vient

$\frac{df}{dr} = \rho g = -\rho GM \frac{r}{R^3}$ qui s'intègre en $f(r) = -\frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^6} r^2 + C$. On obtient donc

$p(r, \alpha) = \frac{3}{8\pi} \frac{M}{R^3} \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha - \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^6} r^2 + C$. Par hypothèse, $p(r=0, \alpha) = P_0$ donc $C = P_0$ et

il reste $p(r, \alpha) = P_0 + \frac{3}{8\pi} \frac{M}{R^3} \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha - \frac{GM}{R^3} r^2 = \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] + \frac{3}{8\pi} \frac{M}{R^3} \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha$.

8) Sur la surface, on a $p = 0$ par hypothèse donc l'équation de la surface est $\frac{3}{8\pi} \frac{M}{R^3} \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha - \frac{GM}{R^3} r_s^2 = -P_0$ d'où $\frac{3}{8\pi} \frac{M}{R^3} \frac{GM}{R^3} \omega^2 \frac{R^3}{GM} \sin^2 \alpha + 1 \left[r_s^2 \right] = \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$ soit

$\left[1 - \omega^2 \frac{R^3}{GM} \sin^2 \alpha \right] r_s^2 = R^2$.

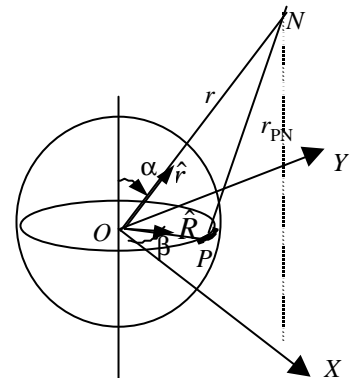
Avec $\omega = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, le paramètre $\varepsilon = \omega^2 \frac{R^3}{GM}$ a pour valeur numérique $\varepsilon = (7,292 \cdot 10^{-5})^2 \frac{(6378 \cdot 10^3)^3}{3,986 \cdot 10^{14}} = 3,46 \times 10^{-3}$. Donc $\left| 1 - \omega^2 \frac{R^3}{GM} \sin^2 \alpha \right|$ ne s'annule jamais quel

que soit α et l'on obtient : $r_s = \pm R \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon \sin^2 \alpha}}$. On peut l'écrire $r_s^2 (1 - \varepsilon \sin^2 \alpha) = R^2$ soit, dans la base cartésienne : $x^2 + (1 - \varepsilon)y^2 = R^2$. Comme $(1 - \varepsilon) > 0$, on reconnaît l'équation d'une ellipse dans le plan méridien. La surface terrestre est donc un ellipsoïde de révolution d'axe \vec{k}_0 .

9) A l'équateur, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc $R_{EQ} = R \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon}}$ et au pôle, $\alpha = 0$ donc $R_p = R$. On en déduit $\frac{\Delta R}{R} = \left| \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon}} - 1 \right|$. Comme $\varepsilon \ll 1$, on peut faire le développement $\sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots$ donc il vient $\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\varepsilon}{2}$. Numériquement, on trouve $\frac{\Delta R}{R} \approx 1,73 \times 10^{-3}$ puis $\Delta R \approx 11 \text{ km}$.

10) Le potentiel créé par la sphère de masse $M - m$ à la distance r est, pour $r > R$, $V_s(r) = -G \frac{M - m}{r}$ d'après la question 2.

Pour calculer le potentiel créé par le cercle, on considère un élément de longueur $d\ell$ centré sur un point P du cercle. Il crée au point d'observation N le potentiel élémentaire $dV_C = -G \frac{\mu d\ell}{r_{PN}}$ avec $\mu = \frac{m}{2\pi R}$.



On peut écrire $\vec{PN} = \vec{PO} + \vec{ON}$ donc $\vec{PN} = r \hat{r} - R \hat{R}$ avec $\hat{r} = (\sin \alpha \hat{X} + \cos \alpha \vec{k}_0)$ et $\hat{R} = (\cos \beta \hat{X} + \sin \beta \hat{Y})$ où \hat{X} est le vecteur du plan $(\hat{r}, \hat{\alpha})$ qui appartient au plan de l'équateur.

On a donc $r_{PN}^2 = |\vec{PN}|^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \hat{r} \cdot \hat{R} = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \sin \alpha \cos \beta$. d'où $\frac{1}{r_{PN}} = \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{R}{r} \sin \alpha \cos \beta + \frac{R^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Comme $R \ll r$, on peut faire le développement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{PN}} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2R}{r} \sin \alpha \cos \beta + \frac{R^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{R}{r} \sin \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) (1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) \right] + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \end{aligned}$$

Avec $d\ell = R d\beta$, il vient

$$V_C(N) = -G \frac{\mu R}{r} \int_0^{2\pi} d\beta \left[1 + \frac{R}{r} \sin \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) (1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) \right] + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -G \frac{\mu R}{r} \int_0^{2\pi} d\beta \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \right) + \frac{R}{r} \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 \alpha \cos 2\beta + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \right) \right] \\
&= -G \frac{\mu R 2\pi}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{3}{2} (1 - \cos^2 \alpha) \right) + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \right] \\
&= -G \frac{m}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \right) + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \right]
\end{aligned}$$

Le potentiel total crée en N est donc $V(r, \alpha) = V_S(r) + V_C(r, \alpha)$

$$\begin{aligned}
&= -G \frac{M-m}{r} - G \frac{m}{r} + G \frac{m}{r} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) (1 - 3 \cos^2 \alpha) + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \right] \\
&= -G \frac{M}{r} + G \frac{m}{r} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) (1 - 3 \cos^2 \alpha) + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \right] = -G \frac{M}{r} \left[1 + \frac{m}{4M} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) (1 - 3 \cos^2 \alpha) + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \right]
\end{aligned}$$

On obtient la forme demandée avec $A = GM$ et $B = \frac{1}{4} \frac{m}{M}$.

11) Par définition, $\vec{L} = \vec{OS} \wedge m_s \vec{U}$ pour un satellite S de masse m_s . Dans le référentiel T_0 qui est galiléen, le théorème du moment cinétique en O s'écrit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0$. Le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation due à la Terre donc $\vec{M}_0 = r\hat{r} \wedge mg\hat{r} = \vec{0}$. Le moment cinétique est donc une constante du mouvement. Notons \vec{k} le vecteur unitaire de la direction de \vec{L} . Or d'après la définition de \vec{L} , le vecteur position $\vec{r} = \vec{OS}$ est à chaque instant dans un plan perpendiculaire à \vec{L} donc à \vec{k} . S est donc dans le plan fixe contenant O et perpendiculaire à \vec{k} .

12) Dans la base polaire $(O, \hat{r}, \hat{\phi})$ du plan orbital, on a $\vec{r} = r \hat{r}$ et $\vec{U} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi}$. Donc $\vec{L} = m_s r^2 \frac{d\phi}{dt} \vec{k}$. Comme \vec{L} est constant, son module l'est aussi. donc $L = m_s r^2 \frac{d\phi}{dt}$ est une constante du mouvement. ($C = \frac{L}{m_s}$ est la constante des

aires). Pour une masse unité, on a $L = r^2 \frac{d\phi}{dt}$.

L'énergie mécanique est $E = \frac{1}{2} m_s U^2 + m_s V(r)$ soit encore

$$E = \frac{1}{2} m_s \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] - m_s \frac{A}{r}. \text{ Cette énergie est constante en l'absence de frottement.}$$

Pour une masse unité, on a donc $E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{A}{r}$.

En reportant, on obtient $E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \right] - \frac{A}{r}$.

13) Si la trajectoire est circulaire, alors $r = r_c$ et la vitesse angulaire est constante et vaut $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|_c = \frac{L}{m_s r_c^2}$. L'accélération tangentielle est donc nulle et la relation fondamentale de la dynamique s'écrit simplement $-m_s \frac{U^2}{r_c} \hat{r} = -m_s \frac{A}{r_c^2} \hat{r}$ donc $U^2 = \frac{A}{r_c}$; l'énergie mécanique s'écrit donc $E = \frac{1}{2} m_s \frac{A}{r_c} - m_s \frac{A}{r_c} = -\frac{1}{2} m_s \frac{A}{r_c}$.

Or $\frac{dr}{dt} = 0$ sur la trajectoire circulaire donc on a $E = \frac{1}{2} m_s \left(\frac{L^2}{m_s^2 r_c^2} \right) - \frac{m_s A}{r_c}$ ou encore $-\frac{1}{2} m_s \frac{A}{r_c} = \frac{1}{2} m_s \left(\frac{L^2}{m_s^2 r_c^2} \right) - \frac{m_s A}{r_c}$ soit $\frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{m_s r_c^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{m_s A}{r_c}$. On en déduit $r_c = \frac{L^2}{m_s^2 A}$ soit, pour une masse unité $r_c = \frac{L^2}{A}$. On en déduit $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|_c = \frac{L m_s^4 A^2}{m_s L^4} = \frac{m_s^3 A^2}{L^3}$ soit, pour une masse unité $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|_c = \frac{A^2}{L^3}$. Ensuite, on a $E = -\frac{1}{2} m_s \frac{A}{r_c} = -\frac{1}{2} m_s \frac{A}{L^2} m_s^2 A = -\frac{1}{2} \frac{A^2}{L^2} m_s^3$ soit, pour une masse unité, $E = -\frac{1}{2} \frac{A^2}{L^2}$.

Application numérique : D'après ce qui précède, $L = m_s \omega r_g^2$ donc

$\omega = m_s^2 \frac{A^2}{m_s^3 \omega^3 r_g^6}$ d'où $r_g^6 = \frac{A^2}{m_s \omega^4}$, soit, pour une masse unité $r_g = \sqrt[6]{\frac{A}{\omega^2}}$. Comme $A = GM = 3,986 \times 10^{14}$, on trouve $r_g = 42\,164$ km. C'est la valeur connue du rayon de la trajectoire d'un satellite géostationnaire.

14) Avec la relation $\cos \alpha = \sin \varphi \sin \theta$, on peut écrire $V(r, \theta, \varphi) = -\frac{A}{r} - \frac{AB R^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)$. Par définition, la valeur moyenne sur la trajectoire est $\hat{V}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} V(r, \theta, \varphi) r d\varphi$ soit puisque la valeur moyenne de $\sin^2 \varphi$ vaut $\frac{1}{2}$, $\hat{V}(r, \theta) = -\frac{A}{r} - \frac{AB R^2}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right)$ que l'on peut écrire $\hat{V}(r, \theta) = V_0(r) + \hat{V}_1(r, \theta)$ avec $\hat{V}_1(r, \theta) = -\frac{AB R^2}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right)$.

15) La variation élémentaire d'énergie potentielle est, pour un satellite de masse unitaire, $d\hat{V}_1(r, \theta) = -\frac{AB R^2}{r^2} (-3 \sin \theta \cos \theta) d\theta$ donc on obtient

$$\hat{\Gamma}(r, \theta) = -\frac{3AB R^2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \vec{u}$$

On vérifie que pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\hat{\Gamma}$ est négatif. Il tendrait à aligner le plan de la trajectoire du satellite avec le plan équatorial du bourrelet, c'est-à-dire à diminuer l'angle θ , si le « cerceau » était fixe.

16) Le théorème du moment cinétique appliqué en O dans le référentiel T_0 galiléen peut s'écrire $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}$ car on a vu que le moment de la force gravitationnelle due à

la sphère est nul. Avec l'expression $\vec{L} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \vec{k}$ (pour une masse unitaire), on obtient

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dL}{dt} \vec{k} + L \frac{d\vec{k}}{dt}$. D'une part, L est constant dans le modèle étudié. D'autre part, on

peut écrire $\vec{k} = \cos\theta \vec{k}_0 - \sin\theta (\vec{k}_0 \wedge \vec{u})$. Mais \vec{k}_0 et θ sont constants donc

$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\sin\theta \frac{d}{dt} (\vec{k}_0 \wedge \vec{u})$. Or $-\vec{k}_0 \wedge \vec{u}$ est un vecteur unitaire du plan équatorial dont la

dérivée est $\frac{d}{dt} (-\vec{k}_0 \wedge \vec{u}) = \frac{d\psi}{dt} \vec{u}$ d'où $\frac{d\vec{L}}{dt} = L \frac{d\psi}{dt} \sin\theta \vec{u}$. Le théorème du moment ciné-

tique conduit alors à $L \frac{d\psi}{dt} \sin\theta = -3 \frac{AB}{r} \frac{R^2}{r^2} \sin\theta \cos\theta$ ou encore

$L\dot{\psi} = -3 \frac{AB}{r} \frac{R^2}{r^2} \cos\theta$. Or, la trajectoire est toujours circulaire, donc on a toujours

$A = \frac{L^2}{r}$ et $L = r^2 \dot{\phi}$ donc, en reportant, on obtient $\dot{\psi} = -3B\dot{\phi} \frac{R^2}{r^2} \cos\theta$.

N.B. Cette expression n'est pas correcte. Il manque $\sin^2\theta$ (cf BUP n°707 page 1084 ou ESIM PC 1995). Mais par l'artifice de la valeur numérique de B , les valeurs numériques ci-dessous sont bonnes

On peut intégrer l'équation précédente par rapport au temps en

$\Delta\psi = -3B\Delta\phi \frac{R^2}{r^2} \cos\theta$ donc, pour $\Delta\phi = 2\pi$, on trouve $\Delta\psi = -6\pi B \frac{R^2}{r^2} \cos\theta$

17) Application numérique :

$$\Delta\psi = -6\pi \frac{0,000541 \frac{6378^2}{6378 + 832}}{1} \cos(98^\circ 45') = 1,214 \times 10^{-3} \text{ rad} = 4' 10''$$

Par ailleurs, d'après la troisième loi de Kepler, la période de révolution du sa-

tellite est $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ soit numériquement $T = 2\pi \sqrt{\frac{(6378 \cdot 10^3 + 832 \cdot 10^3)^3}{3,986 \cdot 10^{14}}} = 6093 \text{ s}$

c'est-à-dire 1 heure 41 minutes et 33 secondes. Alors la durée τ nécessaire pour que la

précession soit de 2π est $\tau = T \frac{2\pi}{\Delta\psi}$ soit numériquement $\tau = 6093 \frac{2\pi}{1,214 \cdot 10^{-3}} =$

$3,153 \times 10^7 \text{ s} = 365 \text{ jours solaires}$ (en prenant 1 jour solaire = 86400 s). La période de

précession est égale à une année solaire. Un point donné de la Terre est donc toujours survolé par le satellite dans les mêmes conditions d'éclairement ; cela justifie le nom de satellite héliosynchrone (=synchrone avec le Soleil).

DEUXIÈME PROBLÈME

CINETIQUE DE CHARGE DES GOUTTES

1) La charge est uniformément répartie sur les surfaces cylindriques. La distribution de charge est donc invariante par les symétries du cylindre. Il en est de même du champ électri-

que qui est donc radial et ne dépend que de r . On choisit une surface de Gauss Σ cylindrique de rayon r , d'axe Oz et de longueur ℓ . Le flux de \vec{E} s'écrit alors $\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dS = 2\pi r \ell E(r)$.

Pour $a < r < b$, la charge intérieure à Σ est Q donc le théorème de Gauss conduit à

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \cdot \ell r}$$

2) On a $dV(r) = -\vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$. Donc sur un chemin allant du barreau à l'électrode, on obtient $V_b - V_a = \int_a^b dV = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \frac{\vec{u}_r}{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \ln\left|\frac{b}{a}\right|$.

Par hypothèse, $V_b = V_0$ et $V_a = V$ donc $V_0 - V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \ln\left|\frac{b}{a}\right|$. La charge Q étant portée par l'armature de potentiel V , on a $V - V_0 = \frac{Q}{C_1}$ d'où $C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln\left|\frac{b}{a}\right|}$.

3) En notant $U(t)$ la tension aux bornes du condensateur et $e(t)$ la f.e.m. de la source, on a $e(t) = U(t) + R_1 \frac{d}{dt} C_1 U(t)$ soit $\frac{dU(t)}{dt} + \frac{U(t)}{R_1 C_1} = \frac{V_0}{R_1 C_1}$ pour $t > 0$ dont la solution est

$U(t) = V_0 + A e^{-\frac{t}{t_1}}$. $U(t)$ est la tension aux bornes d'un condensateur c'est donc une fonction continue. Pour $t < 0$, on a $U = 0$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} U(t) = V_0 + A = 0$ et il vient $U(t) = V_0 - V_0 e^{-\frac{t}{t_1}}$.

Comme $U(t) = V_0 - V(t)$, on en déduit $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{t_1}}$. La constante de temps de charge du condensateur est $t_1 = R_1 C_1$. Numériquement, on trouve $R_1 = \frac{10.2 \times 10^{-3}}{2\pi(20 \times 10^{-6})^2} = 7,96 \text{ M}\Omega$ et

$$C_1 = \frac{10^{-9} \cdot 2 \times 10^{-3}}{18 \cdot \ln\left|\frac{300}{20}\right|} = 4,10 \times 10^{-14} \text{ F} \text{ donc } t_1 = 3,27 \times 10^{-7} \text{ s} = 0,33 \text{ }\mu\text{s}.$$

On a $Q(t) = -C_1(V_0 - V(t)) = -C_1 V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{t_1}}\right)$. l'instant t_C est donc tel que

$$C_1 V_0 \left(1 - e^{-\frac{t_C}{t_1}}\right) = \frac{99}{100} C_1 V_0 \text{ soit } t_C = t_1 \ln 100. \text{ Numériquement, } t_C = 1,5 \text{ }\mu\text{s}.$$

D'après ce modèle, la durée de la charge est bien plus petite que celle de formation d'une goutte.

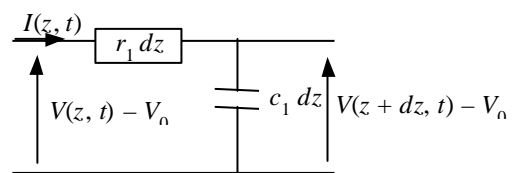
4) On peut représenter la tranche de longueur dz par le schéma électrique suivant

On a donc

$$V(z, t) = r_1 dz I(z, t) + V(z + dz, t)$$

Avec un développement de Taylor au premier ordre, on peut écrire

$$V(z + dz, t) = V(z, t) + \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} dz + \dots \text{ et il reste}$$



$$r_1 I(z, t) = -\frac{\partial V(z, t)}{\partial z}$$

5) La loi des nœuds s'écrit $I(z, t) = I(z + dz) + \frac{\partial}{\partial t} \left[c_1 V(z + dz, t) \right]$ donc au premier ordre,

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = c_1 \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}$$

6) En combinant les deux relations, on obtient $\frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} = c_1 \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}$ soit

$$c_1 \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{r_1 c_1} \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} \text{ qui est bien une équation de diffusion avec } \alpha = \frac{1}{r_1 c_1}$$

$$\text{aussi } \alpha = \frac{\ell^2}{RC_1} = \frac{\ell^2}{2R_1 C_1} \text{ d'où } \alpha = \frac{\ell^2}{2t_1}$$

7) On reporte l'expression $V_p(z, t) = Z_p(z) \cdot T_p(t)$ dans l'équation de la diffusion et l'on obtient : $Z_p(z) \frac{dT_p(t)}{dt} = \alpha T_p(t) \frac{d^2 Z_p(z)}{dz^2}$ que l'on peut écrire $\frac{1}{T_p(t)} \frac{dT_p(t)}{dt} = \alpha \frac{1}{Z_p(z)} \frac{d^2 Z_p(z)}{dz^2}$.

Cette égalité entre une d'une part une fonction de t seulement et d'autre part une fonction de z seulement ne peut être vérifiée quel que soient t et z que si chaque terme est indépendant de t et z . Notons θ cette constante. Il vient $\frac{dT_p(t)}{dt} - \theta T_p(t) = 0$ dont la solution est du type

$T_p(t) = T_0 e^{\theta t}$. Elle diverge donc lorsque t tend vers l'infini si $\theta > 0$ ce qui n'est pas envisageable. On posera donc $\theta = -\frac{1}{\tau}$ où τ est une constante positive homogène à un temps. On a donc

$$T_p(t) = T_{p0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Alors, $Z_p(z)$ est solution de $\frac{d^2 Z_p(z)}{dz^2} + \frac{1}{\alpha \tau} Z_p(z) = 0$. On a donc

$$Z_p(z) = Z_{p1} \cos \frac{z}{\delta} + Z_{p2} \sin \frac{z}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\alpha \tau} \text{ et il vient } V_p(z, t) = \left[V_{p1} \cos \frac{z}{\delta} + V_{p2} \sin \frac{z}{\delta} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

8) La condition à la limite $z = 0$ s'écrit $V_p(z = 0, t) = 0$ car, dans ce modèle, le barreau est en contact avec le réservoir qui est au potentiel nul. Donc $V_{p1} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ ce qui entraîne

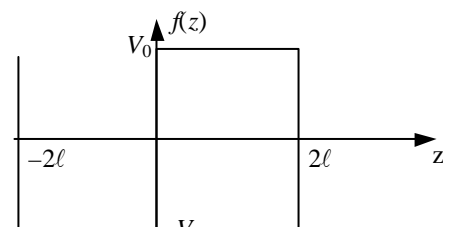
$$V_{p1} = 0. \text{ On a donc } V_p(z, t) = V_p \sin \frac{z}{\delta} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ puis } V(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} V_p \sin \frac{z}{\delta} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

9) A l'extrémité du barreau, le courant qui sort est nul donc $I_p(z = \ell, t) = 0$. Or on a vu que la loi d'Ohm s'écrit $r_1 I_p(z, t) = -\frac{\partial V_p(z, t)}{\partial z}$ donc, à l'extrémité $\frac{\partial V_p(z = \ell, t)}{\partial z} = 0$. Avec

l'expression précédente de $V_p(z, t)$, on obtient $V_p \frac{1}{\delta} \cos \frac{\ell}{\delta} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ d'où $\frac{\ell}{\delta} = \left[2p + 1 \right] \frac{\pi}{2}$ puis

$$V(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} V_p \sin \left[\left(2p + 1 \right) \frac{\pi z}{2\ell} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

10) On a $V(z, t = 0^+) = V_0$.



Pour la fonction $f(z)$ représentée ci-contre, les coefficients de la série s'écrivent

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{2}{4\ell} \int_{-2\ell}^{2\ell} f(z) \sin(k_p z) dz \\ &= \frac{1}{2\ell} \left[\int_{-2\ell}^0 -V_0 \sin(k_p z) dz + \int_0^{2\ell} V_0 \sin(k_p z) dz \right] \\ &= \frac{1}{2\ell} \left[2 \int_0^{2\ell} V_0 \sin(k_p z) dz \right] = \frac{V_0}{2\ell} \frac{2}{k_p} \left[-\cos(k_p z) \right]_0^{2\ell} = \frac{2V_0}{2k_p \ell} \left[1 - \cos(2k_p \ell) \right] \end{aligned}$$

Donc $A_p = 0$ si $2k_p \ell = 2n\pi$ et $A_p = 2$ si $2k_p \ell = (2n + 1)\pi$: il reste

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2p+1)\pi} \sin\left((2p+1)\pi \frac{z}{2\ell}\right)$$

En identifiant cette expression avec $V(z, t=0^+) = \sum_{p=0}^{\infty} V_p \sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{2\ell}\right)$, on trouve

$$V_p = \frac{4V_0}{(2p+1)\pi}. \text{ D'autre part, la relation } \delta = \sqrt{\alpha\tau} \text{ conduit à } \frac{1}{\tau} = \alpha \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{4\ell^2}. \text{ Il vient donc}$$

$$\text{enfin } V(z, t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \exp\left[-\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 \alpha}{4\ell^2} t\right] \sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{2\ell}\right)$$

11) Le facteur $\exp\left[-\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 \alpha}{4\ell^2} t\right]$ décroît dans le temps avec une constante de

temps $\tau_p = \frac{4\ell^2}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \alpha}$ d'autant plus petite que p est grand. Le terme prépondérant de la

série correspond donc à $p = 0$ soit $V(z, t) = \frac{4V_0}{\pi} \exp\left[-\frac{\pi^2 \alpha}{4\ell^2} t\right] \sin\left(\frac{\pi z}{2\ell}\right)$. La constante de temps

de charge est $t_1 = \frac{4\ell^2}{\pi^2 \alpha}$ soit, puisque $\alpha = \frac{\ell^2}{2t_1}$, $t_1 = \frac{8}{\pi^2} t_1$.

En $z = \ell$, on a $V(z, t) = \frac{4V_0}{\pi} \exp\left[-\frac{t}{t_1}\right]$ donc la valeur finale est atteinte à 1% près à

l'instant t_C tel que $t_C = t_1 \ln(100)$. c'est-à-dire $t_C = \frac{8}{\pi^2} t_1$. Numériquement, on trouve

$$t_C = \frac{8}{\pi^2} 1,5 \times 10^{-6} = \underline{1,22 \mu\text{s}}.$$

12) On trouve $t_C < t_C$ mais du même ordre de grandeur. On peut donc considérer que le modèle discret est suffisant pour décrire le phénomène. Comme $t_1 = \frac{8}{\pi^2} R_1 C_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{R}{2} C_1$. La résistance effective du barreau est donc $R_{\text{eff}} = \frac{8}{\pi^2} \frac{R}{2}$. Comme $\frac{8}{\pi^2} = 0,81$, la modification n'est pas très importante.

13) On trouve $v = \frac{\ell}{t_C} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1,22 \times 10^{-6}} = 1,64 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$. Cette vitesse est 80 fois plus grande que celle du jet. On peut donc considérer que le jet est uniformément chargé de ma-

nière instantanée, ce qui est une hypothèse du modèle discret. Cela valide aussi la nullité de la vitesse u du fluide dans ce modèle.

14) On a $t_1'' = (R_e + R_{eff}) \cdot C_1$ soit, d'après les expressions de R_e , R_{eff} et C_1 ,

$$t_1'' = \frac{\rho}{\pi a^2} \left[z_e + \frac{8}{2\pi^2} \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right] \text{ d'où } t_1'' = 2\rho\epsilon_0 \left[z_e + \frac{8}{2\pi^2} \frac{\ell}{a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right]$$

15) Comme ci-dessus, on trouve $t_c'' = t_1'' \ln(100)$. Or, numériquement

$$t_1'' = 10 \frac{10^{-9}}{18\pi} \left[1 + \frac{8}{2\pi^2} 2 \cdot 10^{-3} \frac{2 \times 10^{-3}}{(20 \times 10^{-6})^2 \ln\left(\frac{300}{20}\right)} \right] = 5,91 \times 10^{-7} \text{ s d'où } t_c'' = 2,72 \mu\text{s. Cette du-}$$

rée est 3 fois plus petite que celle nécessaire à la formation des gouttes ; il est donc possible de charger les gouttes pendant leur formation.

16) Le jet réel n'est pas parfaitement cylindrique donc les lignes de courants à l'intérieur ne sont plus rectilignes ainsi que les lignes de champ entre le jet et l'électrode de charge. De plus, les pincements correspondent à une diminution du rayon local du jet, c'est-à-dire entraîne une augmentation de la valeur locale de la résistance et une diminution (logarithmique) de la capacité. Globalement, la charge est plus lente dans ces parties. Mais les renflements n'apparaissent qu'à l'extrémité du jet, lorsque sa charge est pratiquement terminée. On peut donc penser que la forme réelle du jet entraîne une éventuelle augmentation de la durée de charge mais faible. Les résultats obtenus précédemment ne seront pas remis en cause fondamentalement.