

**A.1) Tension Superficielle**

**A.1.1)** Le nombre de molécules à la surface est directement proportionnelle à cette surface (si on fait l'hypothèse que chaque molécule occupe une aire  $a$  en surface, on a  $N = A/a$  molécules. Par ailleurs, l'énergie est proportionnelle au nombre de molécules  $N$  et donc à la surface.

**A.1.2)**

$$[\gamma] = \frac{[E]}{[A]} = \text{J. m}^{-2} = \text{kg.s}^{-2}$$

L'ordre de grandeur est fournir par l'énoncé... Pour l'eau  $\gamma \simeq 70.10^{-2} \text{ kg.s}^{-2}$ .

**A.2) Loi de Laplace**

**A.2.1)** Il suffit de faire la différence des deux surfaces soit :

$$dA = 4\pi(R + dr)^2 - 4\pi R^2 = 8\pi R dr \quad \text{à l'ordre 1 en } dr$$

On sait que l'énergie due à la surface vaut  $E = \gamma A$ , d'où finalement :

$$dE = \gamma dA = 8\pi\gamma R dr$$

**A.2.2)** On fait une différence de volume cette fois :

$$dV = \frac{4}{3}\pi(R + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 dr \quad \text{à l'ordre 1 en } dr$$

Lors d'une variation de volume  $dV$ , le travail des forces de pression est  $-PdV$ . Ici, il existe deux forces de pression antagoniste la pression extérieur  $P_0$  "classique" et la pression intérieure  $P_1$  qui s'oppose à la première (donc son travail est de signe opposé), on peut alors en déduire le travail total des forces de pression :

$$\delta W = -PdV = (P_1 - P_0)dV = \Delta P dV$$

**A.2.3)** Comme le propose l'énoncé, on égalise les deux expressions soit :

$$dE = \delta W \implies 8\pi\gamma R dr = \Delta P dV = 4\pi R^2 dr \Delta P \implies \Delta P = 2 \frac{\gamma}{R}$$

**A.2.4)** A.N.  $\Delta P = 1,46.10^4 \text{ Pa} = 0,15 \text{ bar}$

**A.3) Hydrodynamique de mouillage**

**A.3.1.a)** Pour un écoulement incompressible (ce qui est le cas nécessairement avec un fluide incompressible), on a  $\text{div } \vec{v} = 0$ .

**A.3.1.b)** Rappelons ici qu'en coordonnées cartésiennes  $\Delta v = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix}$

$$\text{et } (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et } \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Ici, on a  $\vec{v} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ w(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$ , on peut donc en déduire en projetant l'équations de Navier-Stokes (on raisonne à

deux dimension car le problème est invariant suivant l'axe  $Oz$ ) :

$$\rho \left[ \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=0 \text{ car stationnaire}} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \implies \rho \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

De plus, on a  $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ . Les trois équations recherchées sont finalement :

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

**A.3.2.a)** On va raisonner ici en ordre de grandeur et on va écrire  $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L_0}$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{h}$ . L'incompressibilité du fluide entraîne alors :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \implies \frac{U}{L_0} + \frac{W}{h} = 0 \implies |W| \simeq |U| \frac{h}{L_0} \ll U$$

On peut donc négliger  $W$  par rapport à  $U$  *i.e.* négliger la vitesse transversale !

Quelque soit la grandeur étudiée, on a par ailleurs  $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L_0} \ll \frac{1}{h} \sim \frac{\partial}{\partial y}$ . Autrement dit la variation suivant  $y$  est toujours nettement plus importante que suivant  $x$ . Le raisonnement est bien entendu identique pour la dérivée seconde et on va donc par la suite négliger  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  par rapport aux dérivées selon  $y$ .

Si le nombre de Reynolds est très petit, on sait qu'on peut négliger les termes convectifs de la dérivée particulière devant les termes diffusifs de viscosité. En prenant en compte toutes ces approximations, on a alors :

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) && \boxed{\text{avec } w = 0} \\ \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) && \implies \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 && 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) && \boxed{\text{avec } Re \ll 1} \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial y} && \end{aligned}$$

néglige  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

On trouve donc bien le couple d'équations recherchées  $\begin{cases} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$

**A.3.2.b)** On a  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , donc la pression est constante dans l'épaisseur du film.

Ici l'énoncé omet un point important : la loi de Laplace s'écrit  $\Delta P = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  où les courbures  $\frac{1}{R_1}$  et  $\frac{1}{R_2}$  sont selon les deux directions de la surface (dans le cas de la sphère  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$ ) ; dans le cas d'un système invariant selon une direction, on a  $\frac{1}{R_2} = 0$  et donc la loi de Laplace donne :

$$\Delta P = P - P_0 = \gamma \frac{1}{R} = -\gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \implies \boxed{P = P_0 - \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}$$

**A.3.3.a)** Dans le cas d'un fluide visqueux, il y a continuité de la vitesse au voisinage d'un solide ce qui entraîne  $u(y=0) = V$ . En régime stationnaire, les différentes "forces" s'équilibrent. A l'interface, seule la force de cisaillement existe et doit donc être nulle ce qui entraîne  $\frac{du}{dy}(y=e) = 0$ . Cette condition traduit l'absence de force de viscosité sur l'interface.

**A.3.3.b)** Cherchons  $u(y)$  (on suppose que  $u$  est indépendante de  $x$ )

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho g \implies u = \frac{\rho g}{2\eta} y^2 + Ay + B$$

Les constantes d'intégration se déduisent des conditions limites :  $u(y=0) = V = B$  et  $\frac{du}{dy}(y=e) = A + \frac{\rho g}{\eta} e = 0 \implies A = -\frac{\rho g}{\eta} e$ . On trouve donc finalement :

$$u(y) = \frac{\rho g}{2\eta} y^2 - \rho g e y + V = \frac{\rho g}{2\eta} y(y - 2e) + V$$

Considérons une profondeur  $L$  arbitraire suivant  $z$ , le débit volumique au travers d'une section  $x = \text{cte}$  s'écrit comme :

$$D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint u(y) dy dz$$

On peut "oublier" la profondeur  $z$  et le débit  $Q$  par unité de longueur se déduit alors directement :

$$Q = \int_0^e dy v(y) = \frac{\rho g}{2\eta} \left( \frac{e^3}{3} - e^3 \right) + V e = -\frac{\rho g}{3\eta} e^3 + V e$$

**A.3.3.c)** Si on  $Ca \sim 1$ ,  $e$  maximise  $Q$  soit :

$$\frac{dQ}{de} = 0 \implies -\frac{\rho g}{\eta} e^2 + V = 0 \implies e = \sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}} = \sqrt{Ca} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

La longueur  $\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$  est appelée longueur capillaire et permet de donner une taille caractéristique où les effets de la pesanteur et la capillarité sont du même ordre de grandeur...

**A.3.3.d)**

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho V e}{\eta} = \frac{\rho V}{\eta} Ca^{2/3} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = \frac{\rho \gamma}{\eta^2} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \frac{\eta V}{\gamma} Ca^{2/3} = Ca^{5/3} \Lambda^{-1}$$

**A.3.3.e)** On a  $\Lambda = \eta^2 \sqrt{\frac{g}{\rho \gamma^3}} = 10^{-6} \sqrt{\frac{10}{10^3 (72,8 \cdot 10^{-2})^3}} = 1,6 \cdot 10^{-7}$ . Si  $Re \sim 1$ , on a alors  $Ca \sim \Lambda^{3/5} \simeq 8,4 \cdot 10^{-5}$  ce qui correspond à une vitesse  $V = 6,1 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$

**A.4.1)** Il suffit de changer le signe de  $Q$  ce qui traduit le changement d'orientation de l'axe puis de faire  $V = 0$  pour trouver le nouveau débit :  $Q = \frac{\rho g}{3\eta} h^3$  où  $h$  désigne l'épaisseur du film au point considéré.

**A.4.2)** On va réaliser un bilan de matière (ou de volume ce qui est identique du fait de l'incompressibilité) sur la tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

Ce qu'on a à  $t + dt$  = Ce qu'on a à  $t$  + les termes de variation

Reste alors à exprimer chacun des termes :

- le volume à l'instant  $t + dt$  vaut  $h(x, t + dt) dx$ .
  - de même, le volume à l'instant  $t$  vaut  $h(x, t) dx$ .
  - la variation vient du volume qui entre en  $x$  et vaut  $Q(x) dt$  et de celui qui sort en  $x + dx$  et vaut  $Q(x + dx) dt$
- Le bilan s'écrit finalement :

$$h(x, t + dt) dx = h(x, t) dx + Q(x) dt - Q(x + dx) dt \implies \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\rho g}{\eta} h^2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

**A.4.3)** On utilise la forme proposée par l'énoncé  $h = Ax^{\alpha}t^{\beta}$  en l'injectant dans l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\rho g}{\eta} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \implies A\beta x^{\alpha} t^{\beta-1} = -\frac{\rho g}{\eta} \alpha A^3 x^{3\alpha-1} t^{3\beta}$$

D'où finalement en identifiant les différents termes, le système :

$$\begin{cases} A\beta &= -\frac{\rho g}{\eta} \alpha A^3 \\ \alpha &= 3\alpha - 1 \\ \beta - 1 &= 3\beta \end{cases} \implies \begin{cases} A &= \sqrt{\frac{\eta}{\rho g}} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On sait que  $h(L) = e$  d'où finalement :

$$\sqrt{\frac{\eta}{\rho g}} L(t)^{1/2} t^{-1/2} = e \implies L(t) = \frac{\rho g}{\eta} e^2 t$$

La vitesse de progression de la zone amincie se déduit alors simplement comme  $V_{am} = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{\rho g}{\eta} e^2$ .

**A.4.4)** Afin d'avoir un film d'épaisseur la plus grande possible, on a intérêt à utiliser une vitesse  $V$  la plus importante possible et en particulier grande devant la vitesse d'amincissement afin de ne pas laisser au film le temps de s'amincir ... Toutefois le problème n'est pas simple car une vitesse  $V$  assure une épaisseur  $e$  élevée ce qui conduit à une vitesse d'amincissement  $V_{am}$  élevée également ... Si on écrit :

$$V_{am} = \frac{\rho g}{\eta} e^2 = \frac{\rho g}{\eta} \frac{\gamma}{\rho g} Ca^{4/3} < V \implies Ca^{-1/3} > 1 \implies Ca < 1$$

On doit donc chercher à augmenter  $V$  pour augmenter  $e$  mais tout en restant avec  $Ca < 1$ .

**B.1.1)** Si on considère  $H_2$  comme un gaz parfait, on a :

$$PV = NRT \implies \frac{N}{V} = \frac{P}{RT} \implies n_{H_2} = N_A \frac{N}{P} = \frac{P}{k_B T} = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

**B.1.2)** On a un taux d'ionisation  $\alpha = 10^{-3}$  d'où  $n_e = n_p = n_c = \alpha n_{H_2} = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$

**B.1.3)** Pour l'hydrogène, on connaît la masse molaire  $M = 1 \text{ g.mol}^{-1}$ . On peut alors en déduire la masse d'un atome  $m_p = \frac{M}{N_A} = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . On trouve donc  $\frac{m_p}{m_e} \simeq 1823$ . Autrement dit un ion est toujours nettement plus massif qu'un électron.

**B.2.1)** On sait que  $\Delta N_e = n_e \Delta V = n_e S dx$ .

**B.2.2)** La tranche en  $x$  se retrouve en  $x + \xi(x, t)$  et celle en  $x + dx$  se retrouve en  $x + dx + \xi(x + dx, t)$ . On trouve le volume grâce à la distance entre les deux tranches :

$$\Delta V' = S[(x + dx + \xi(x + dx, t)) - (x + \xi(x, t))] = S dx (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}) = \Delta V (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x})$$

**B.2.3)** La tranche considérée est un système fermé (on se place en description lagrangienne) donc le nombre d'électrons à l'intérieur n'a pas changé  $\Delta N'_e = \Delta N_e = n_e \Delta V$ . On peut alors en déduire la densité électronique :

$$n'_e(x, t) = \frac{\Delta N'_e}{\Delta V'} = \frac{n_e \Delta V}{\Delta V (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x})} \simeq n_e (1 - \frac{\partial \xi}{\partial x})$$

**B.2.4)** Les ions n'ont pas bougé, on a donc une densité  $n_p = n_e$  de protons en tout point de l'échantillon. Chaque proton porte une charge  $+e$  et on a toujours les électrons à la concentration  $n'_e$  qui portent chacun une charge  $-e$ . Au total, on a donc une charge volumique qui s'écrit :

$$\rho(x, t) = \sum q_i n_i = en_p - en'_e = e(n_e - n'_e) = en_e \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

**B.2.5)** Physiquement,  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  représente la vitesse des électrons situés à l'abscisse  $x$ .  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  représente quant à lui la compression de la tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .

**B.2.6)** On a l'équation de Poisson qui découle directement de l'équation de Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \text{avec } \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V, \quad \boxed{\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

**B.2.7)** C'est l'équation de Poisson.

**B.2.8)** En remplaçant  $\rho$ , on trouve donc :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{en_e}{\epsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

**B.3.1)** On sait que  $\vec{F} = q\vec{E} = -q\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -q \frac{dV}{dx} \vec{e}_x = e \frac{dV}{dx} \vec{e}_x$ .

**B.3.2)** Considérons l'équation de la question 2.8, on peut en déduire par intégration :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{en_e}{\epsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial x} \implies \frac{dV}{dx} = -\frac{en_e}{\epsilon_0} \xi(x, t) + K$$

La constante d'intégration est nulle car on sait que pour  $\vec{E} = 0$  on a  $\xi = 0$  *i.e.* que  $\frac{dV}{dx} = 0$  lorsque  $\xi = 0$  donc  $K = 0$ . On trouve donc finalement :

$$\vec{F} = e \frac{dV}{dx} \vec{e}_x = -\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0} \xi(x, t)$$

**B.3.3)** On peut maintenant appliquer le PFD à un électron :

$$m_e \vec{a} = \sum \vec{F} \implies m_e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F = -\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0} \xi(x, t)$$

car la seule force présente est la force électrique (le poids est négligeable). L'équation recherchée est donc :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \xi \implies \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \xi = 0$$

En introduisant la très classique pulsation plasma  $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$ .

**B.3.4)** C'est l'équation classique d'un oscillateur harmonique qui conduit à la solution  $\xi = \xi_0 \cos(\omega_p t + \varphi)$

**B.3.5)**  $\omega_{p_{e^-}} = \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} = 2,8 \cdot 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$

**B.3.6)** On peut en déduire simplement la pulsation plasma pour les ions :

$$\omega_{p_p} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_p \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \omega_{p_{e^-}} = 6,6 \cdot 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$$

**B.3.7)**  $\frac{\omega_{pe^-}}{\omega_{pp}} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \simeq 43$ , les électrons oscillent donc 43 fois plus vite que les ions ce qui justifie qu'au temps "courts" on considère que seuls les électrons se déplacent.

**B.4.1)** Comme d'habitude, on écrit le PFD :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} \implies m_e i\omega \vec{v} = -e\vec{E} \implies \vec{v} = \frac{-e}{im_e\omega} \vec{E}$$

**B.4.2)** On peut alors en déduire la densité de courant électronique en écrivant :

$$\vec{J}_e = \sum \rho_i \vec{v}_i = -n_e e \vec{v} = \frac{n_e e^2}{im_e\omega} \vec{E}$$

**B.4.3)**  $\vec{J}_e$  est donc en avance de phase de  $\pi/2$  par rapport à  $\vec{E}$  ce type de comportement est identique à une bobine en électrocinétique puisqu'on a  $U = L \frac{dI}{dt} \implies I \sim \frac{U}{i\omega}$ .

**B.4.4)** Par analogie, il suffit de remplacer  $-e$  par  $e$  et  $m_e$  par  $m_p$  :

$$\vec{J}_p = \frac{n_e e^2}{im_p\omega} \vec{E}$$

On sait que  $\frac{J_e}{J_p} = \frac{m_p}{m_e} \sim 2000$  donc le courant électronique est nettement plus important que le courant ionique.

**B.4.5)**  $\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = i\omega\epsilon_0 \vec{E}$

**B.4.6)** On a donc cette fois-ci un retard de phase de  $\pi/2$  du courant par rapport au champ. Ce type de comportement est analogue au condensateur en électrocinétique où  $I = C \frac{dU}{dt} \implies I \sim i\omega U$ .

**B.4.7)** On néglige le courant ionique soit

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_e + \vec{J}_D = \frac{n_e e^2}{im_e\omega} \vec{E} + i\omega\epsilon_0 \vec{E} = i\omega\epsilon_0 \vec{E} \left( 1 - \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \right) = i\omega\epsilon_0 \vec{E} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

**B.5.1)** La force de frottement s'oppose au mouvement donc à la quantité de mouvement ce qui permet d'affirmer que  $\lambda > 0$ . Par ailleurs, par homogénéité, on trouve  $[\lambda] = \frac{[F]}{[p]} = s^{-1}$ .  $\lambda$  est donc une fréquence caractéristique des chocs.

**B.5.2)** On écrit le PFD pour trouver :

$$ma = \sum F \implies m_e \frac{dv}{dt} = -eE - \lambda m_e v \implies \frac{1}{\lambda} \frac{dv}{dt} + v = \frac{-e}{m\lambda} \vec{E}$$

**B.5.3)** En régime permanent, on peut utiliser la notation complexe pour écrire :

$$\left( 1 + \frac{i\omega}{\lambda} \right) v = \frac{-e}{m\lambda} \vec{E} \implies v = \frac{-e}{m\lambda} \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\lambda}} \vec{E}$$

On peut alors chercher à isoler le module et la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert reliant  $v$  à  $E$  pour écrire :

$$\underline{v} = \frac{-e}{m\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}}} \exp j\varphi E_\omega \exp i\omega t$$

Soit finalement en notation réelle, la solution particulière de l'équation :

$$v_p = \frac{-e}{m\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}}} E_\omega \cos(\omega t - \varphi)$$

A cette solution particulière s'ajoute la solution homogène de l'équation :

$$v_h = A \exp -\lambda t$$

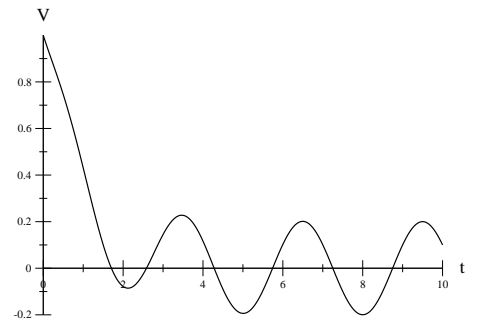
En toute généralité, on a alors  $v = v_p + v_h$  et on peut déterminer la constante  $A$  grâce à la condition initiale  $v(0) = v_0$  d'où

$$A = v_0 + \frac{e}{m\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}}} E_\omega \cos \varphi$$

On a donc finalement :

$$v = v_0 \exp -\lambda t - \frac{e}{m\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}}} E_\omega (\cos(\omega t - \varphi) - \cos \varphi \exp -\lambda t)$$

**B.5.4)** Après un transitoire qui dure  $\lambda$ , on retrouve le régime forcé où la vitesse  $v$  oscille avec un déphasage de  $\varphi$  par rapport à  $E$ .



**B.5.5)** Les électrons oscillent donc à la pulsation  $\omega$ .

**B.5.6)** On écrit toujours le PFD pour trouver :

$$m \frac{dv}{dt} = -eE = -eE_0 - eE_\omega \exp i\omega t$$

**B.5.7)** On peut recycler le raisonnement de la question B.5.3 pour écrire en notation complexe la réponse à chaque composante du champ. On peut en effet appliquer le principe de superposition pour calculer la solution particulière pour chaque pulsation du champ :

$$\begin{aligned} v_{p\omega} &= \frac{-e}{m\lambda} \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\lambda}} E_\omega \exp i\omega t \\ v_{p0} &= \frac{-e}{m\lambda} E_0 \end{aligned}$$

**B.5.8)** Le passage à la notation réelle donne alors les solutions particulières :

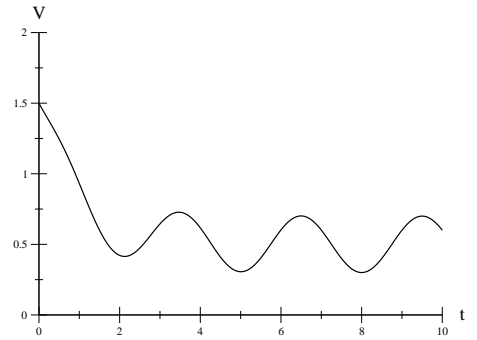
$$\begin{aligned} v_{p\omega} &= \frac{-e}{m\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}}} E_\omega \cos(\omega t - \varphi) \\ v_{p0} &= \frac{-e}{m\lambda} E_0 \end{aligned}$$

On peut alors écrire que  $v$  est la superposition des solutions particulières et homogène soit :

$$v = A \exp -\lambda t - \frac{e}{m\lambda} \left( E_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}}} E_\omega \cos(\omega t - \varphi) \right)$$

**B.5.9)**

Après un régime transitoire qui disparaît après un temps caractéristique  $\frac{1}{\lambda}$ , on voit que la vitesse tend vers le régime forcé qui contient une composante continue et une composante sinusoïdale.



**B.5.10)** La trajectoire des électrons est donc cette fois-ci une avancée progressive avec le temps (qui correspond à la vitesse constante  $v_{p0}$ ) avec une oscillation à la pulsation  $\omega$  autour de cette avancée.

**B.6.1)**  $V_{ut} = l \times ep \times V_d = 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-2} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut en déduire la masse qui fond par unité de temps  $m_{Fe} = V_{ut} \rho_{Fe}$  et finalement le nombre de moles qui fond par unité de temps  $n_{Fe} = \frac{m_{Fe}}{M_{Fe}}$  soit finalement en nombre de particules  $N_{Fe} = N_A \frac{m_{Fe}}{M_{Fe}} = N_A \frac{l \times ep \times V_d \times \rho_{Fe}}{M_{Fe}} = 8,4 \cdot 10^{20} \text{ atomes} \cdot \text{s}^{-1}$

**B.6.2)** Si pour chaque atome de Fer, il faut exactement un électron pour le délier, on en déduit le courant de particules nécessaire (qui est exactement  $N_{Fe}$ ) soit finalement l'intensité du courant de telle torche comme :

$$I = -eN_{Fe} = 1,3 \cdot 10^2 \text{ A}$$

**B.6.3)** La puissance en Watt du jet d'électron est alors  $P = N_{Fe} \times 20\text{eV} = 2,7 \text{ kW}$

**B.6.4)** La valeur de l'intensité recherchée paraît tout de même extrêmement importante ...