

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Partie I

I.1. La distribution est invariante par antisymétrie par rapport à tous les plans passant par M et contenant l'axe Oz . Le champ en M est **contenu** dans tous ces plans. Il est donc porté par \vec{e}_z .

Pour calculer le champ magnétique, on ne peut qu'utiliser la formule de Biot et Savart

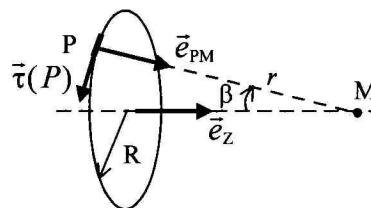
$\vec{B}(M) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot d\vec{\ell} \cdot \vec{\tau}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3}$ où $d\vec{\ell}$ est un élément centré en un point P de la distribution. La projection sur \vec{e}_z est donc

$B(M) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot d\vec{\ell} \cdot \left(\vec{\tau}(P) \wedge \frac{\vec{e}_{PM}}{r^2} \right) \cdot \vec{e}_z$ car $|\vec{PM}| = r$ pour tout les points

P . On a donc $B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \oint d\vec{\ell} \cdot \vec{\tau}(P) \cdot (\vec{e}_{PM} \wedge \vec{e}_z)$. Comme

$(\vec{e}_{PM} \wedge \vec{e}_z) = \sin(\beta) \vec{\tau}(P)$, il reste $B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \sin(\beta) \oint d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \sin(\beta) 2\pi R$. Avec $\sin(\beta) = \frac{R}{r}$

et $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, il reste $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z}$.



Partie II

II.A.1. En projection sur \vec{u}_x , on a $B_{sx}(t) = Ki_1(t) - Ki_2(t) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - Ki_3(t) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ d'où

$$B_{sx}(t) = K \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_s) - \frac{1}{2} K \cdot I_m \left(\cos\left(\omega t + \varphi_s - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \varphi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$= K \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_s) - \frac{1}{2} K \cdot I_m \left(2 \cos(\omega t + \varphi_s) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$= K \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_s) - K \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_s) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{soit } \boxed{B_{sx}(t) = \frac{3}{2} K \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_s)}$$

En projection sur \vec{u}_y , on a $B_{sy}(t) = Ki_2(t) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - Ki_3(t) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ d'où

$$B_{sy}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} K \cdot I_m \cos\left(\omega_s t + \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} K \cdot I_m \cos\left(\omega_s t + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} K \cdot I_m \left((-2) \sin(\omega t + \varphi_s) \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$\text{soit } \boxed{B_{sy}(t) = \frac{3}{2} K \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_s)}$$

A.2. La norme de ce champ est telle que $\|\vec{B}\|^2 = B_{sx}^2 + B_{sy}^2$ soit $\boxed{\|\vec{B}_s(t)\| = \frac{3}{2} K \cdot I_m}$. $\vec{B}(t)$ est

porté par le vecteur unitaire $\vec{e}(t) = \cos(\omega t + \varphi_s) \vec{e}_x + \sin(\omega t + \varphi_s) \vec{e}_y$. Le sens et la direction de ce vecteur changent au cours du temps. Il tourne autour de O dans le plan xOy à la **vitesse angulaire ω** dans le sens direct.

A.3. Le champ magnétique tourne alors dans le sens indirect. (Le calcul est un peu long, il aurait été préférable d'inverser les phases 2 et 3.)

$$A.4. \|\vec{B}_s(t)\| = \frac{3}{2}(0,05).(15) \frac{2}{\sqrt{2}} = 1,6 \text{ T.}$$

Une fréquence de 1 Hz correspond à une vitesse de rotation de 1 tr/s donc ici $\omega = 3,0 \times 10^3 \text{ tr/min.}$

B.1. Le rotor possède un moment dipolaire magnétique $\vec{\mathcal{M}} = pI.S\vec{n}$. Le moment instantané des forces de Laplace exercées par le champ magnétique $\vec{B}_s(t)$ sur ce dipôle est $\vec{\Gamma}(t) = \vec{\mathcal{M}}(t) \wedge \vec{B}_s(t) = \mathcal{M}.B_s.\sin(\omega_s t + \varphi - \theta(t))\vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{\Gamma}(t) = pI.S.B_s.\sin((\omega_s - \Omega)t + \varphi - \theta_0)\vec{e}_z}$.

B.2 La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale étant nulle, la valeur moyenne de ce couple est nulle sauf si $\Omega = \omega_s$. Alors elle vaut $\boxed{\Gamma_{\text{SYN}} = pI.S.B_s.\sin(\varphi - \theta_0)}$. La fréquence de rotation du champ magnétique étant fixée, le couple est nul au démarrage et le moteur ne peut pas démarrer seul.

B.3. La courbe $\Gamma_{\text{SYN}} = pI.S.B_s.\sin(\psi)$ est la suivante, pour $\psi \in [-\pi, \pi]$. Le fonctionnement moteur correspond à $\Gamma_{\text{SYN}} > 0$ soit $\boxed{\psi \in [0, \pi]}$. Le couple est maximum pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ et vaut $\boxed{\Gamma_{\text{MAX}} = pI.S.B_s}$.

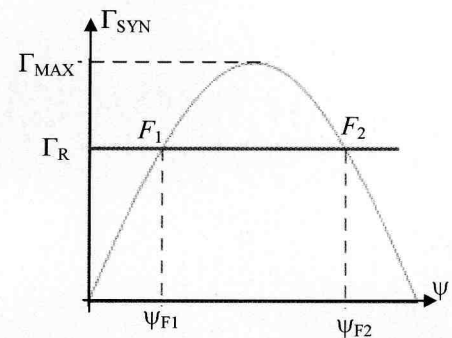
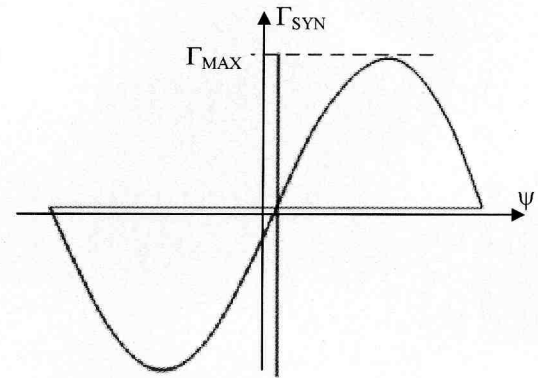
Par définition, le flux de \vec{B}_s à travers le rotor est $\Phi_{\text{MAG}} = p \iint_S \vec{B}_s \cdot \vec{n} dS$. Lorsque $\Gamma_{\text{SYN}} = \Gamma_{\text{MAX}}$, le champ magnétique et le moment dipolaire (porté par le vecteur \vec{n}) font un angle de $\frac{\pi}{2}$. On a donc $\boxed{\Phi_{\text{MAG}} = 0}$ dans ce cas.

B.4. La courbe tracée ci-contre montre qu'il y a deux points d'intersection des courbes $\Gamma(\psi)$ et Γ_{SYN} , correspondant à deux points de fonctionnement F_1 et F_2 (ou une valeur double si $\psi = \frac{\pi}{2}$). Notons Γ_R la valeur du couple en l'absence de perturbation.

Si la vitesse de rotation augmente, alors l'angle interne ψ diminue puisque la vitesse de rotation du champ ne change pas. Alors, si le point de fonctionnement initial est F_2 , on constate que Γ_{SYN} devient supérieur à Γ_R ce qui tend à augmenter la vitesse de rotation. Il n'y a donc plus de synchronisme possible.

Si le point de fonctionnement initial est F_1 , une diminution de l'angle interne entraîne $\Gamma_{\text{SYN}} < \Gamma_R$ donc la vitesse diminue et revient à la valeur de synchronisme ω_s . Le point de fonctionnement F_1 est donc stable.

Si $\psi = \frac{\pi}{2}$, une variation $\delta\psi$ de ψ diminue Γ_{SYN} et la vitesse de rotation diminue ce qui tend à augmenter ψ . Si $\delta\psi > 0$, cette perturbation n'est donc pas compensée au contraire du cas où $\delta\psi < 0$. L'état $\psi = \frac{\pi}{2}$ est donc stable seulement vis-à-vis des diminutions de ψ .

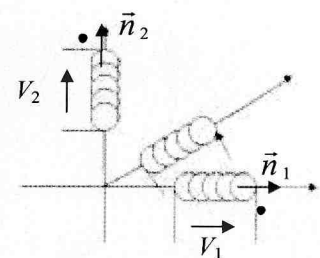


Partie III

III.A.1. À un instant t quelconque, le champ magnétique créé par la bobine tournante R_p a pour expression

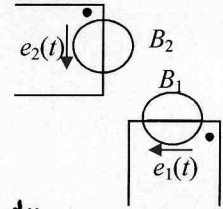
$$\vec{B}(t) = \alpha J_0 \cos[\Omega t + \theta_0] \vec{e}_x + \alpha J_0 \sin[\Omega t + \theta_0] \vec{e}_y.$$

Il crée à travers la bobine B_1 le flux magnétique $\Phi_1(t) = n \Sigma \alpha J_0 \cos[\Omega t + \theta_0]$ et à travers B_2 le flux $\Phi_2(t) = n \Sigma \alpha J_0 \sin[\Omega t + \theta_0]$



avec les orientations des normales aux spires \vec{n}_1 et \vec{n}_2 indiquées sur le schéma. Le point indique la borne homologe de la bobine correspondant à l'orientation de la normale.

Le flux magnétique dans chaque bobine dépend du temps donc il y apparaît un phénomène d'induction de f.e.m. $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$. Avec les orientations indiquées pour le flux, le schéma électrique équivalent des bobines est donc le suivant :



On a donc $V_1(t) = -e_1(t) = \frac{d\Phi_1(t)}{dt}$ soit $V_1(t) = -n\Sigma\alpha J_0 \cdot \Omega \sin[\Omega t + \theta_0]$. De même, on a

$V_2(t) = -e_2(t) = \frac{d\Phi_2(t)}{dt}$ d'où $V_2(t) = n\Sigma\alpha J_0 \cdot \Omega \cos[\Omega t + \theta_0]$. *Mais il semble que l'auteur du sujet a choisi: $V_1 = +e_1$ et $V_2 = +e_2$.*

Une valeur de tension mesurée par une seule bobine correspond à deux valeurs possibles de l'angle θ entre 0 et π . En détectant le sinus et le cosinus de l'angle à l'aide des deux tensions, il est déterminé de manière univoque.

A.2 L'étude est la même que ci-dessus, il suffit de remplacer J_0 par $J_0 \cos(\omega_p t)$. On trouve donc $\Phi_1(t) = n\Sigma\alpha J_0 \cos(\omega_p t) \cdot \cos[\Omega t + \theta_0]$. On en déduit, en posant $V_{0m} = n\Sigma\alpha \cdot \omega_p \cdot J_0 m$:

$$V_1(t) = \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = +V_{0m} \cos(\omega_p t) \cdot \frac{\Omega}{\omega_p} \cdot \sin[\theta(t)] + V_{0m} \sin(\omega_p t) \cdot \cos[\theta(t)]$$

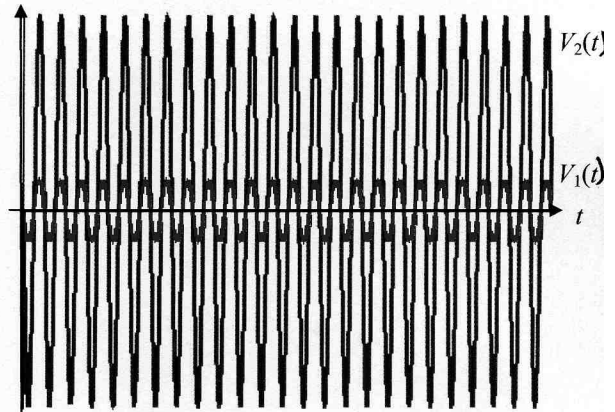
Si $\omega_p \gg \Omega$, il reste $V_1(t) = +n\Sigma\alpha \omega_p J_0 m \cdot \sin(\omega_p t) \cos[\theta(t)]$. (L'expression proposée par l'énoncé a *Bien le signe*).

On a de même et $\Phi_2(t) = V_{0m} \cos(\omega_p t) \cdot \sin[\Omega t + \theta_0]$ d'où

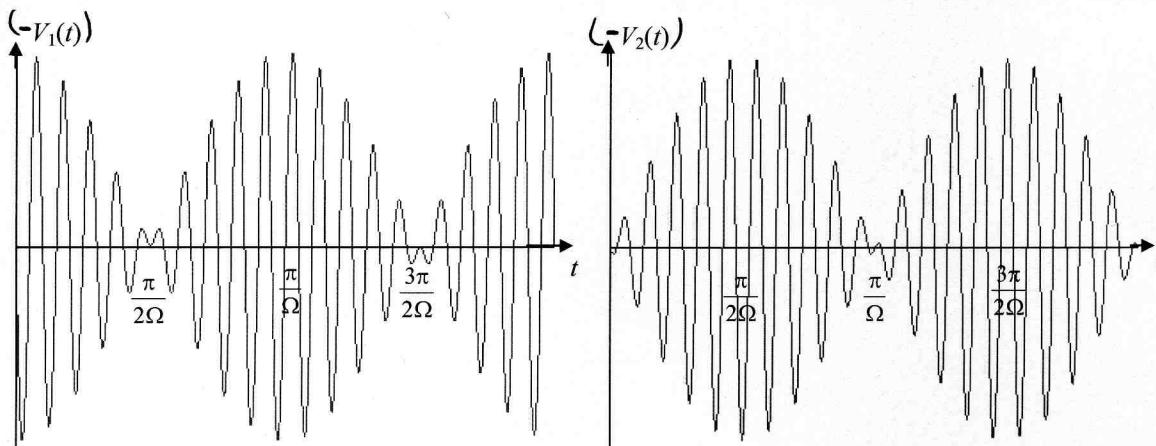
$$V_2(t) = \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = +V_{0m} \cos(\omega_p t) \cdot \frac{\Omega}{\omega_p} \cdot \cos[\theta(t)] + V_{0m} \sin(\omega_p t) \cdot \sin[\theta(t)]$$

Si $\omega_p \gg \Omega$, il reste $V_2(t) = +n\Sigma\alpha \omega_p J_0 m \cdot \sin(\omega_p t) \sin[\theta(t)]$.

A.3. Lorsque la machine est à l'arrêt, $\Omega = 0$ donc $V_1 = +V_{0m} \sin(\omega_p t) \cos(\theta)$ et $V_2 = +V_{0m} \sin(\omega_p t) \sin(\theta)$. Pour $\theta = 0,9 \times \frac{\pi}{2}$, on a les courbes suivantes, sinusoïdales et d'amplitude constante, tracées avec la même valeur de ω_p que pour la question suivante.



A.4. On obtient $V_1(t) = +V_{0m} \sin(\omega_p t) \cos[\Omega t + \theta_0]$ et $V_2(t) = +V_{0m} \sin(\omega_p t) \sin[\Omega t + \theta_0]$. Comme $\Omega \ll \omega_p$, on a des courbes de battements, de pulsation de porteuse ω_p et de pulsation de battement Ω . On a donc, pour $\theta_0 = 0$, les courbes ci-dessous :



A.N. $V_{0m} = (10)(0,1 \times 10^{-4})(4)(2\pi \cdot 10 \times 10^3)(200 \times 10^{-3}) = 5,0 \text{ V}$.

Le signal utile (de pulsation Ω) module une porteuse de pulsation élevée ω_p . On pourra donc le récupérer par une détection synchrone qui éliminera les bruits de fréquences différentes de Ω . C'est l'objet de la suite du problème.

B.1. Pour éviter la saturation en tension à la sortie du multiplieur, les valeurs adoptées dont en général $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$.

B.2. On a $s_m(t) = +kV_{0m} \cdot V_0 \sin^2(\omega_p t) \cos(\Omega t + \theta_0)$ que l'on peut linéariser en

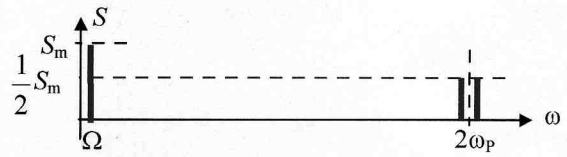
$$s_m(t) = +kV_{0m}V_0 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega_p t)) \cos(\Omega t + \theta_0)$$

$$= +kV_{0m}V_0 \frac{1}{2} \left(\cos(\Omega t + \theta_0) - \frac{1}{2} [\cos((2\omega_p + \Omega)t + \theta_0) + \cos((2\omega_p - \Omega)t - \theta_0)] \right)$$

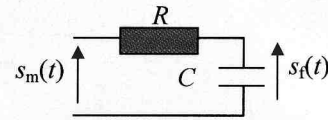
En notant $S_m = \frac{1}{2} kV_{0m}V_0$, il reste

$$= +S_m \cos(\Omega t + \theta_0) - \frac{1}{2} S_m [\cos((2\omega_p + \Omega)t + \theta_0) + \cos((2\omega_p - \Omega)t - \theta_0)]$$

dont le spectre en amplitude est :



B.3. Il faut utiliser un **filtre passe-bas** pour récupérer la composante en $\cos[\theta(t)]$. Un montage passif possible pour un filtre du premier ordre est le suivant :



B.4. La pulsation de coupure d'un tel filtre est $\omega_c = \frac{1}{RC}$ et

la pente de l'asymptote aux grandes fréquences est -20dB par décade. Pour avoir une atténuation de 40dB des composantes de pulsation voisines de $2\omega_p$, il faut donc $2\omega_p > 100 \times \omega_c$ soit $RC > \frac{100}{2\omega_p}$.

Pour conserver la composante de pulsation Ω , il faut $\Omega < \omega_c$ soit $RC < \frac{1}{\Omega}$.

La contrainte à respecter est donc $\frac{100}{2\omega_p} < RC < \frac{1}{\Omega}$.

B.5. Si le filtrage est correct, la tension relevée à sa sortie est $s_f(t) = +\frac{1}{2} kV_{0m}V_0 \cos(\Omega t + \theta_0)$.

En réalité, $H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

A 3000 tr/min, $\Omega = 100\pi$ et $RC\Omega = 1/4$

Donc au lieu d'avoir $s_f(t) = S_m \cos \theta$, on a $s_f(t) \approx \frac{S_m}{\sqrt{1 + 1/16}} \cos(\theta - \arctan(1/4))$

$\arctan(1/4) = 0,24 \text{ rad}$. $\Delta \theta = -0,24 \text{ rad}$.

B.6 $\sin(\pi/2 - 0,24) = 0,97$ donc l'erreur due à l'imperfection du filtre passe bas n'entraîne qu'une diminution de l'ordre de 3% par rapport au couple max.

Partie IV

A) La spire est mobile dans un champ magnétique non constant. Il se produit donc un phénomène d'induction.

Le flux de \vec{B}_s à travers la bobine du rotor est $\Phi(t) = \iint_S \vec{B}_s(t) \cdot \vec{n}(t) dS$
 $= B_s p S \cos[(\omega_s t + \varphi) - (\Omega t + \theta_0)]$ car le module $B_s = \|\vec{B}_s\|$ du champ magnétique est uniforme sur toute la surface d'une spire du rotor.

Ce flux varie dans le temps donc la f.e.m. est $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$
 $= B_s p S (\omega_s - \Omega) \sin[(\omega_s - \Omega)t + (\varphi - \theta_0)]$. On peut orienter la tension induite $u(t)$ de façon que $u(t) = B_s p S (\omega_s - \Omega) \sin[(\omega_s - \Omega)t + (\varphi - \theta_0)]$.

