CCP PSI 2008 Physique 1 Problème A

L'entropie dans le système respiratoire :

Etude d'un écoulement dans un tuyau cylindrique :

A.1 L'écoulement admet une symétrie de révolution au tour de l'axe Oz (cylindre circulaire et pesanteur négligée) donc $\vec{v}$ ne dépend pas de θ

A.2 L'équation de conservation de la matière s'écrit : $\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$

Pour un fluide incompressible, ρ = cte donc $\boxed{div\left(\vec{v}\right)=0}$.

$\vec{v}$ n'ayant qu'une composante, et selon Oz, on a $div\left(\vec{v}\right)=0 \Rightarrow \partial v/\partial z = 0$; v ne dépend pas de z.

A.3. La vitesse est indépendante de la variable t : $\boxed{\vec{v}=v(r)\vec{u}_z}$

A.4. En régime stationnaire pour un fluide incompressible $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{0}$.

L'équation de Navier-Stokes peut encore s'écrire ici : $\rho\left(\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{grad}\ P+\eta\Delta\vec{v}$. En passant par les coordonnées cartésiennes, on peut écrire $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}=\left(v_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)v_z=0$.

D'où : $\vec{0}=-\overrightarrow{grad}P+\eta\Delta\vec{v}$ soit en projetant : $\dfrac{\partial P}{\partial r}\ =\ 0$; $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial\theta}\ =\ 0$; $\dfrac{\partial P}{\partial z}\ =\ \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)$

P ne dépend donc ni de r ni de θ, mais seulement de z.

A.5 L'équation projetée sur Oz devient $\dfrac{dP}{dz}\ =\ \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)$. Le premier membre ne dépend que de z, tandis que le second ne dépend que de r ; donc $\dfrac{dP}{dz}$ est une vraie constante.

Par intégration et compte tenu des conditions aux limites, $\boxed{P\left(z\right)=P_0+\dfrac{\left(P_L-P_0\right)z}{L}}$

A.6 On obtient $\dfrac{\left(P_L-P_0\right)}{L}\ =\ \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)$. Par intégration, on calcule : $v\left(r\right)=\dfrac{\left(P_L-P_0\right)}{4\eta L}r^2+A\ln(r)+B$

Pour que v(0) soit finie, on doit avoir A = 0.

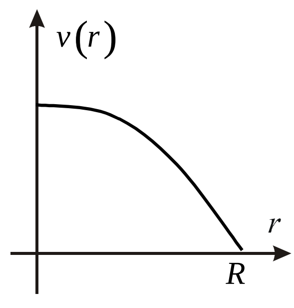
Sur la paroi de la conduite par continuité de la vitesse on doit avoir $v(R)=0$;

on en déduit $B=-\dfrac{\left(P_L-P_0\right)R^2}{4\eta L}$,

d'où la loi parabolique donnée : $v\left(z\right)=-\dfrac{1}{4\eta}\dfrac{P_0-P_L}{L}\left(r^2-R^2\right)$.

La vitesse maximale est obtenue quand $\dfrac{dv}{dr}=0=-\dfrac{2}{4\eta}\dfrac{P_0-P_L}{L}r$ soit en $r=0$

$\boxed{v_{\max}=\dfrac{1}{4\eta}\dfrac{P_0-P_L}{L}R^2}$



Ecoulement stationnaire:

A.8. On applique le principe fondamental de la dynamique au petit cylindre en régime stationnaire puis on projette selon Oz : $0=P_0\pi r^2-P_L\pi r^2+2\pi rL\eta\dfrac{dv}{dr}$

$\boxed{\frac{dv}{dr}=\frac{-(P_0-P_L)}{2L\eta}r}$ d'où $v(r)=\frac{(P_L-P_0)}{4\eta L}r^2+B$. Comme précédemment, Sur la paroi de la conduite par continuité de la vitesse on doit avoir $v(R)=0$; on en déduit $B=-\frac{(P_L-P_0)R^2}{4\eta L}$, d'où $v(z)=-\frac{1}{4\eta}\frac{P_0-P_L}{L}(r^2-R^2)$.

Résistance hydraulique:

A.9 Le débit volumique est $Q=\iint_{section}\vec{v}.\vec{ds}=\int_o^R\frac{1}{4\eta}\frac{P_L-P_0}{L}(r^2-R^2)2\pi rdr=\frac{\pi}{2\eta}\frac{P_L-P_0}{L}\left[\frac{r^4}{4}-R^2\frac{r^2}{2}\right]_0^R$ $Q=\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{P_0-P_L}{L}=K(P_0-P_L)$ avec $\boxed{K=\frac{\pi R^4}{8\eta L}}$ La vitesse moyenne est : $\boxed{v_{moy}=\frac{Q}{\pi R^2}=\frac{1}{8\eta}\frac{P_0-P_L}{L}R^2=\frac{1}{2}v_{\max}}$
A.10 La résistance hydraulique est $\boxed{R_{Hy}=\frac{1}{K}=\frac{8\eta L}{\pi R^4}}$ c'est l'équivalent ΔV=RI avec $\boxed{I \Leftrightarrow Q \text{ et } \Delta V \Leftrightarrow \Delta T}$
A.11. La résistance varie en $1/R^4$ alors que la résistance électrique $R_{th}=\frac{L}{\sigma\pi R^2}$ varie en $1/R^2$.   Cela vient du fait que la vitesse n'est pas uniforme sur la section.
A.12. Un écoulement est laminaire quand les lignes de courant sont lisses et surtout d'évolution temporelle non aléatoire. Il faut que le nombre de Reynolds soit inférieur à 2000 soit $R_e=\frac{2R\mu v_{moy}}{\eta}<2000$ $\boxed{R<\frac{1000\eta}{\mu v_{moy}}=1cm}$

Association de résistances hydrauliques :

A.13 a) $P_0-P_{x1}=R_{Hy1}Q$, $P_{x1}-P_{x2}=R_{Hy2}Q$ d'où $P_0-P_{x2}=R_{Hy}Q$ avec : $\boxed{R_{Hy}=R_{Hy_1}+R_{Hy_2}}$
C'est l'équivalent de l'association série de résistance.
b) On a un diviseur de " tension " : $\boxed{P_1=P_2+\frac{R_{Hy_2}}{R_{Hy_1}+R_{Hy_2}}(P_0-P_2)}$
A.14 Ce sont les inverses qui s'ajoutent : $\boxed{\frac{1}{R_{Hy}}=\frac{1}{R_{Hy_1}}+\frac{1}{R_{Hy_2}}}$. En électricité, les conductances s'ajoutent en parallèle.   On a un diviseur de " courant ", $\boxed{Q_1=\frac{R_{Hy_2}}{R_{Hy_1}+R_{Hy_2}}Q}$
A.15 La puissance électrique est $\boxed{P_{elec}=RI^2}$. Par analogie, la puissance hydraulique est $\boxed{P_{visco}=R_HQ^2}$?.

L'arbre bronchique et l'entropie :

A.16. Le nombre de bronchioles est $\boxed{N(p)=2^{p-1}}$
A.17. $\boxed{r_p=r_1h^{p-1}}$, $\boxed{l_p=l_1h^{p-1}}$

A.18. $V_2 = V_1 h^3 \;\; V_3 = V_1\left(h^3\right)^2$. Plus généralement, $\boxed{V_p = V_1\left(h^3\right)^{p-1}}$

Le volume d'une génération p est donc $\boxed{V_{pt} = V_1 2^{p-1}\left(h^3\right)^{p-1} = V_1 X^{\,p-1}}$

Le volume total est : $\boxed{V_t = \sum_{p=1}^{n} V_1 X^{\,p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} V_1 X^{\,p} = V_1 \frac{1-X^n}{1-X}}$ ce qui donne bien $V_1 \frac{1-X^n}{1-X}$

A.19 Comme $R_{Hy} = \frac{1}{K} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$, $R_p = \frac{8\eta l_p}{\pi {r_p}^4} = \frac{8\eta}{\pi}\frac{h^{(p-1)} l_1}{h^{4(p-1)} {r_1}^4}$. D'où $\boxed{R_p = \frac{R_1}{\left(h^3\right)^{p-1}}}$.

Les résistances étant montées en parallèle, $\boxed{R_{tp} = \frac{R_p}{2^{(p-1)}} = \frac{R_1}{X^{(p-1)}}}$

La résistance totale est $\boxed{R_t = \sum_{p=1}^{n} R_{tp} = \sum_{p=0}^{n-1} R_1 \left(\frac{1}{X}\right)^p = R_1 \frac{1-(1/X^n)}{1-(1/X)}}$

A.20 Le volume diverge si la série diverge c'est-à-dire pour X>1 soit $\boxed{h > h_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0.79}$

Inversement, la résistance diverge pour 1/X>1 donc pour $\boxed{h < h_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0.79}$

A.21 $\boxed{P_{visco} = R_t Q_1^2 = R_1 \frac{1-(1/X^n)}{1-(1/X)} Q_1^2}$

A.22 A-t-on le droit ici de dire qu'en régime stationnaire l'entropie d'un système fluide fermé en écoulement est indépendante du temps ?

Si oui, $dS \underset{\substack{2nd \\ \text{Principe}}}{=} \delta S^r + \delta S^c = \frac{\delta Q^r}{T} + \sigma dt = \frac{-P_{visco} dt}{T} + \sigma dt = 0$.

D'où $\boxed{\sigma = \frac{P_{visco}}{T} = \frac{R_1}{T}\frac{1-(1/X^n)}{1-(1/X)} Q_1^2 > 0}$

A.23 $\boxed{\sigma_v = \frac{\sigma}{V_t} = \frac{p_{visco}}{TV_t} = \frac{R_1}{T}\frac{1-(1/X^n)}{1-(1/X)}\frac{Q_1^2}{V_1}\frac{1-X}{1-X^n} = \frac{R_1}{T}\frac{Q_1^2}{V_1} X^{1-n}}$

L'entropie volumique par seconde diverge si X<1 soit $\boxed{h < h_c = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0.79}$

Dans le cas de l'homme, il n'y a pas de divergence.