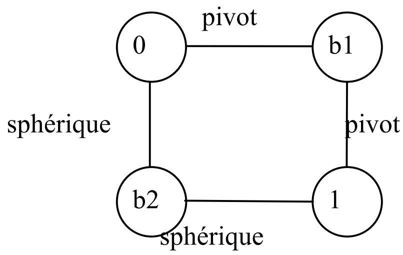
Étude d'un simulateur trois axes (extrait CCP 2003)

Question préalable :

F1	La structure mécanique	**F4**	Les capteurs d'élongation
F2	La centrale hydraulique	**F5**	Les servodistributeurs
F3	Le vérin de compensation de hauteur	**F6**	Le calculateur central

1. Analyse de la conception du simulateur



1.1. $m_c = m_u + m_i = 1 + 1 = 2$ $m_u = 1$ (rotation de b_1 par rapport à 0)
$m_i = 1$ (rotation de b_2 sur lui même)

1.2. $h_s = m_c + 6.\gamma - I_c$ $\gamma = 1$ et $I_c = 1 + 1 + 3 + 3 = 8$
$= 2 + 6 - 8$
$\boxed{h_s = 0 \quad \text{le système est isostatique.}}$

1.3. Si $L_{1\text{-}b2}$ devient une pivot d'axe $(A_2, \vec{x_0})$ alors la mobilité interne de b_2 n'est plus possible.
Donc : $m_c = 1 + 0 = 1$ et $I_c = 1 + 1 + 1 + 3 = 6$
$h_s = 1 + 6 - 6 = 1$
le système devient hyperstatique de degré 1, sa rigidité augmente et il devient plus délicat à assembler.

2. Validation du modèle cinématique relatif au positionnement en hauteur

2.1. Le bras 1 a un mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 0 donc : $\boxed{\vec{\Omega}_{10} = \vec{0}}$

$\vec{V}_{A,1/0} = \vec{V}_{A2,1/0} = \vec{V}_{A2,b2/0}$ car $L_{1\text{-}b2}$ liaison sphérique de centre A2.

$= \cancel{\vec{V}_{O2,b2/0}} + \vec{A2O2} \wedge \vec{\Omega}_{b2/0}$ car $L_{0\text{-}b2}$ liaison sphérique de centre O2.

$\boxed{\vec{V}_{A,1/0} = \dot{\beta}\cdot\vec{x_0} \wedge l\cdot\vec{y_b} = l.\dot{\beta}.\vec{z_b}}$ d'où son module : $\boxed{\|\vec{V}_{A,1/0}\| = l.\dot{\beta}}$

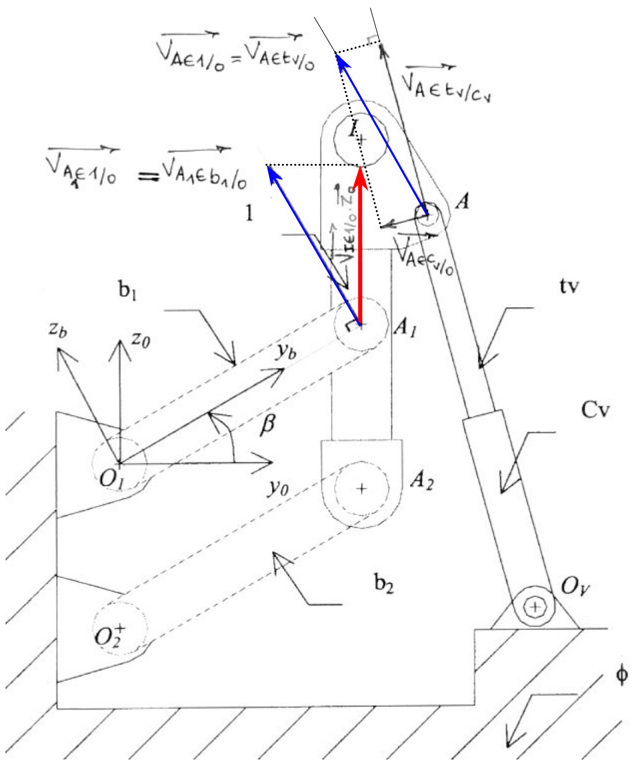
or $\vec{z_b} = \cos\beta.\vec{z_0} - \sin\beta.\vec{y_0}$ donc : $\boxed{\vec{V}_{A,1/0} = l.\dot{\beta}.(\cos\beta.\vec{z_0} - \sin\beta.\vec{y_0})}$

2.2. $\vec{V}_{A,tv/Cv}$ est connue (norme : 1m/s, direction : $\vec{O_vA}$ car translation de tv/Cv, sens : sortie de tv).

D'après la composition des mouvements : $\vec{V}_{A,tv/Cv} = \vec{V}_{A,tv/0} - \vec{V}_{A,Cv/0}$ **[1]**

Or : $\vec{V}_{A,Cv/0}$ a pour support (O_vA) car $L_{0\text{-}Cv}$ pivot d'axe $(O_v, \vec{x_0})$.

$\vec{V}_{A,tv/0} = \vec{V}_{A,1/0}$ car $L_{1\text{-}tv}$ liaison sphérique de centre A, donc $\vec{V}_{A,tv/0}$ a pour support $(A, \vec{z_b})$.



On construit le triangle des vitesses d'après la relation **[1]** et on en déduit : $\|\vec{V}_{A,1/0}\| = \dfrac{3{,}1\text{cm}}{3\text{cm/m.s}^{-1}} = 1{,}03$ m/s

D'après 2.1. on a : $\|\vec{V}_{A,1/0}\| = l.\dot{\beta}$ avec $l = 1{,}22$m donc : $\dot{\beta} = \dfrac{1{,}03}{1{,}22} =$ 0,847 rad/s ≈ 0,851 rad/s (cf. graphe 1)

2.3. Le bras 1 positionne verticalement la cabine par une liaison en I avec le croisillon 2.
La vitesse verticale de la cabine est donc :
$\vec{V}_{I,1/0}\cdot\vec{z_0} = \vec{V}_{A_1,1/0}\cdot\vec{z_0} = l.\dot{\beta}\,\vec{z_b}\cdot\vec{z_0} = l.\dot{\beta}.\cos\beta$

$\boxed{\vec{V}_{I,1/0}\cdot\vec{z_0} = 0{,}89 \text{ m/s}}$

Résultat graphique :
$\vec{V}_{I,1/0}\cdot\vec{z_0} = 2{,}7 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{I,1/0}\cdot\vec{z_0} = 0{,}9 \text{ m/s}}$

3. Spécifications cinématiques du servovérin de hauteur de la nacelle

3.1. $\boxed{\overrightarrow{\Omega_{21}}=\dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} \text{ et } \overrightarrow{\Omega_{32}}=\dot{\psi}.\overrightarrow{y_2}}$

3.2. $\overrightarrow{V_{G,3/0}}=\overrightarrow{V_{I,3/0}}+\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$ avec $\overrightarrow{V_{I,3/0}}=\overrightarrow{V_{I,3/2}}+\overrightarrow{V_{I,2/1}}+\overrightarrow{V_{I,1/0}}=l.\dot{\beta}.(\cos\beta.\overrightarrow{z_0}-\sin\beta.\overrightarrow{y_0})$

En effet :
$$\begin{cases}\overrightarrow{V_{I,3/2}}=\vec{0} \text{ car } L_{2\text{-}3} \text{ liaison pivot d'axe } (I,\overrightarrow{y_2}),\\ \overrightarrow{V_{I,2/1}}=\vec{0} \text{ car } L_{1\text{-}2} \text{ liaison pivot d'axe } (I,\overrightarrow{x_1}),\\ \overrightarrow{V_{I,1/0}}=\overrightarrow{V_{A,1/0}} \text{ car translation circulaire de 1/0 et } \overrightarrow{V_{A,1/0}} \text{ calculée au 2.1.}\end{cases}$$

De plus : $\overrightarrow{\Omega_{30}}=\overrightarrow{\Omega_{32}}+\overrightarrow{\Omega_{21}}+\overrightarrow{\Omega_{10}}=\dot{\psi}.\overrightarrow{y_2}+\dot{\theta}.\overrightarrow{x_1}=\dot{\psi}.\overrightarrow{y_3}$ car $\theta=0, \forall t$.

Donc : $\overrightarrow{V_{G,3/0}}=l.\dot{\beta}.(\cos\beta.\overrightarrow{z_0}-\sin\beta.\overrightarrow{y_0})+\dot{\psi}.\overrightarrow{y_3}\wedge(Y.\overrightarrow{y_3}+Z.\overrightarrow{z_3})$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G,3/0}}=l.\dot{\beta}.(\cos\beta.\overrightarrow{z_0}-\sin\beta.\overrightarrow{y_0})+\dot{\psi}.Z.\overrightarrow{x_3}}$$

or $\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{y_3}$ et $\overrightarrow{z_0}=\overrightarrow{z_1}=\cos\psi.\overrightarrow{z_3}-\sin\psi.\overrightarrow{x_3}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{V_{G,3/0}}=(Z.\dot{\psi}-l.\dot{\beta}.\cos\beta.\sin\psi).\overrightarrow{x_3}-l.\dot{\beta}.\sin\beta.\overrightarrow{y_3}+l.\dot{\beta}.\cos\beta.\cos\psi.\overrightarrow{z_3}}$ **[2]**

3.3. $\overrightarrow{a_{G,3/0}}=\left.\dfrac{d\overrightarrow{V_{G,3/0}}}{dt}\right|_{R_0}=\dfrac{d}{dt}\left(l.\dot{\beta}.(\cos\beta.\overrightarrow{z_0}-\sin\beta.\overrightarrow{y_0})+\dot{\psi}.Z.\overrightarrow{x_3}\right)_{R_0}$

$\overrightarrow{a_{G,3/0}}=-l.(\dot{\beta}^2.\cos\beta+\ddot{\beta}.\sin\beta).\overrightarrow{y_0}+l.(\ddot{\beta}.\cos\beta-\dot{\beta}^2.\sin\beta).\overrightarrow{z_0}+\ddot{\psi}.Z.\overrightarrow{x_3}+\dot{\psi}.Z.\left.\dfrac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right|_{R_0}$ or $\left.\dfrac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right|_{R_0}=\overrightarrow{\Omega_{30}}\wedge\overrightarrow{x_3}=\dot{\psi}.\overrightarrow{y_3}\wedge\overrightarrow{x_3}=-\dot{\psi}.\overrightarrow{z_3}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{a_{G,3/0}}=[\ddot{\psi}.Z-l\sin\psi.(\ddot{\beta}.\cos\beta-\dot{\beta}^2.\sin\beta)].\overrightarrow{x_3}-l.(\dot{\beta}^2.\cos\beta+\ddot{\beta}.\sin\beta).\overrightarrow{y_3}+[l.\cos\psi.(\ddot{\beta}.\cos\beta-\dot{\beta}^2.\sin\beta)-\dot{\psi}^2.Z].\overrightarrow{z_3}}$ **[3]**

3.4. On applique le principe fondamental de la dynamique au pilote dans son mouvement par rapport à 0 :
$m.\overrightarrow{a_{G,3/0}}=(X_{3P}.\overrightarrow{x_3}+Y_{3P}.\overrightarrow{y_3}+Z_{3P}.\overrightarrow{z_3})-m.g.\overrightarrow{z_0}$

D'où on tire :
$$X_{3P}=m.[\ddot{\psi}.Z-l.\sin\psi.(\ddot{\beta}.\cos\beta-\dot{\beta}^2.\sin\beta)-g.\sin\psi]$$
$$Y_{3P}=-m.l.(\dot{\beta}^2.\cos\beta+\ddot{\beta}.\sin\beta)$$
$$Z_{3P}=m.[l.\cos\psi.(\ddot{\beta}.\cos\beta-\dot{\beta}^2.\sin\beta)-\dot{\psi}^2.Z+g.\cos\psi]$$

3.5. Vérification numérique des expressions **[2]** et **[3]** avec le tableau 1 :

		Valeurs calculées aux dates :	
		$t = 0,3$ s	$t = 0,6$ s
$\overrightarrow{V_{G,3/0}}$ (m/s)	*Vx*	-0,897	0,006
	Vy	0	-1,516
	Vz	0	3,264
$\overrightarrow{a_{G,3/0}}$ (m/s^2)	*Ax*	0	0,013
	Ay	0	-14,76
	Az	-0,804	6,589

Ces résultats sont très proches de ceux du tableau 1, les expressions [2] et [3] semblent donc vérifiées.

3.6. Pour annuler A_y on ne peut agir que sur l'axe d'angle θ.

Mouvement d'un véhicule avec résistance de l'air

1. On isole le véhicule et on applique le théorème de la résultante en projection sur l'horizontale :

$$\sum\overrightarrow{F_{\bar{V}\to V}}.\vec{x}=M.\vec{\Gamma}^{G}_{V/Rg}.\vec{x}\Rightarrow F_{Moteur}+F_{air}=\frac{P}{v}-kv^2=M\frac{dv}{dt}\Rightarrow dx=\frac{Md(v^3)}{3\left(P-kv^3\right)} \text{ donc : } \boxed{x=\frac{M}{3k}\ln\left|\frac{P}{P-kv^3}\right|}$$

$$\boxed{Quant\ t\to+\infty \quad v\to V=\sqrt[3]{\frac{P}{k}}}$$

2. Pour $v = \frac{V}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{P}{k}}$ on remplace dans l'expression de x : $\boxed{d = \frac{M}{3k}\ln\frac{8}{7}}$

3. On applique à nouveau le théorème de la résultante : $\sum \overrightarrow{F_{\bar{V}\to V}}.\vec{x} = M.\vec{\Gamma}^{G}_{V/Rg}.\vec{x} \Rightarrow -kv^2 = M\frac{dv}{dt} \Rightarrow dx = \frac{MV}{Vkt+2M}dt$

$$\boxed{x(t) = \frac{M}{k}\ln\left(\frac{1}{2M}kVt+1\right)}$$

4. Avec freinage :

$$\boxed{-F-kv^2 = M\frac{dv}{dt} \Rightarrow t = \frac{M}{k}\sqrt{\frac{k}{M}}\left[\arctan\left(\frac{V}{2}\sqrt{\frac{k}{F}}\right) - \arctan\left(v\sqrt{\frac{k}{F}}\right)\right]}$$