

Trophées E=M6

1. Principe et éléments constitutifs des machines

Voir sujet.

2. Etude de la partie préhensile

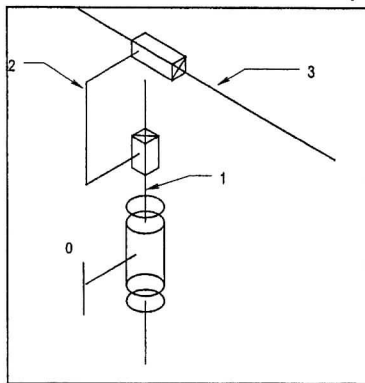
2.1. Analyse des liaisons.

L 1-0 : pivot d'axe (Oz). $\Rightarrow \{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

L 2-1 : glissière de direction (z). $\Rightarrow \{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{z}z \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \forall P \in \text{espace}$

L 3-2 : glissière de direction (X1). $\Rightarrow \{V_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}x_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \forall P \in \text{espace}$

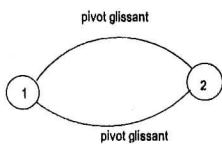
2.2. schéma cinématique.



on notera que le schéma de la figure 7 mélange perspective

isométrique et cavalière

2.3. Etude de la liaison L 2-1.



Cette question évoque l'étude des liaisons en parallèle. Suivant que l'on s'inspire des figures 5et 6 ou de la figure 7, on identifiera tantôt 4 tantôt 2 liaisons en parallèle. Dans les 2 cas les liaisons élémentaires sont définies par des contacts cylindre/cylindre déterminant chacun 4 degrés de liaison (Hyp d'une liaison géométriquement parfaite).

De même on peut induire par **expérience** que la liaison équivalente est une glissière de direction z.

En revanche cette ambiguïté devra être levée pour la détermination du degré d'hyperstatisme. Cela est

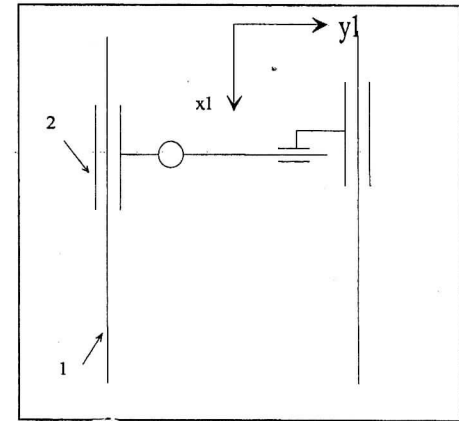
possible en considérant le fait que la figure 7est désignée « schématisation adoptée » !!!
Degré d'hyperstatisme de la liaison :

Caractérisation du système	Formules des mécanismes
<p>p= nombre de pièces (bâti compris) = 2 mc (mobilité totale) = <u>postulée</u> égale à 1 ls = nombre d'inconnues statiques = 2x4 = 8 lc = nombre d'inconnues cinématiques = 2x2 = 4 nb = nombre cyclomatique = 1</p>	<p>Point de vue cinématique : 6 nb - h = lc - mc. $\Rightarrow 6 - h = 4 - 1$</p> <p>Point de vue statique : 6(p-1) - mc = ls - h $\Rightarrow 6(2-1) - 1 = 8 - h$</p> <p>D'où h = 3</p>

Solution isostatique :

Dans la chaîne de positionnement, les trois degrés d'hyperstatisme imposent des contraintes géométriques suivant T_{y1} , R_{y1} , R_z . Comme les liaisons de base des éléments LEGO sont soit des pivots, soit des pivots glissants, la solution isostatique la plus simple est celle définie ci-contre. On vérifie en effet que $6(4-1) - 1 = (5+3x4) - h$... avec h = 0.

Nota : Les solutions hyperstatiques ne sont pas de « mauvaises » solutions. Dans notre cas, compte tenu de la flexibilité des pièces et des jeux dans les liaisons, une solution hyperstatique présente même un avantage : celui de la rigidité.



2.4. Position du point G3.

$$\overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3G_3} = z\vec{Z} + x\vec{X}_1 + b_3\vec{Y}_3$$

2.5. Vecteurs instantanés de rotation.

On a $\overline{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}z$

En appliquant la composition des vitesses et en tenant compte de la question 2.1 on montre que

$$\overline{\Omega}_{2/0} = \overline{\Omega}_{2/1} + \overline{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}z \text{ ainsi que : } \overline{\Omega}_{3/0} = \overline{\Omega}_{3/2} + \overline{\Omega}_{2/1} + \overline{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}z$$

2.6. Vitesses et accélérations.

Pour un mouvement de rotation on a : $\vec{V}(G_1 \in 1/0) = \dot{\alpha}a_1\vec{Y}_1$ et $\vec{\Gamma}(G_1 \in 1/0) = \ddot{\alpha}a_1\vec{Y}_1 - \dot{\alpha}^2a_1\vec{X}_1$

Comme $\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2G_2} = z\vec{Z} - a_2\vec{X}_1$ alors $\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \dot{z}\vec{Z} - \overline{\Omega}_{2/0} \wedge a_2\vec{X}_1 = \dot{z}\vec{Z} - \dot{\alpha}a_2\vec{Y}_1$

Et $\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) = \ddot{z}\vec{Z} - \ddot{\alpha}a_2\vec{Y}_1 + \dot{\alpha}^2a_2\vec{X}_1$

Comme $\overrightarrow{OG_3} = z\vec{Z} + x\vec{X}_1 + b_3\vec{Y}_3$, alors

$\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \dot{z}\vec{Z} + \dot{x}\vec{X}_1 + \overline{\Omega}_{1/0} \wedge x\vec{X}_1 + \overline{\Omega}_{2/0} \wedge b_3\vec{Y}_3 = \dot{z}\vec{Z} + \dot{x}\vec{X}_1 + \dot{\alpha}z \wedge (x\vec{X}_1 + b_3\vec{Y}_3)$

Soit : $\vec{V}(G_3 \in 3/0) = (\dot{x} - \dot{\alpha}b_3 \cos \beta)\vec{X}_1 + x\dot{\alpha}\vec{Y}_1 + \dot{z}\vec{Z}$

Enfin : $\vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) = (\ddot{x} - \dot{a}b_3 \cos \beta) \vec{X}_1 + (\dot{x}\dot{a} + x\ddot{a}) \vec{Y}_1 + \ddot{z} \vec{Z} + \dot{a}\dot{z} \wedge (\dot{x} - \dot{a}b_3 \cos \beta) \vec{X}_1 + \dot{a}\dot{z} \wedge x\dot{a} \vec{Y}_1$

$\vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) = (\ddot{x} - \dot{a}b_3 \cos \beta - x\dot{a}^2) \vec{X}_1 + (\dot{x}\dot{a} + x\ddot{a} + \dot{a}(\dot{x} - \dot{a}b_3 \cos \beta)) \vec{Y}_1 + \ddot{z} \vec{Z}$

2.7. Torseurs d'actions mécaniques.

$\left\{ T_{(0 \rightarrow 1)} \right\}_P = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{(0 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{(0 \rightarrow 1)} \end{matrix} \right\}$ avec $\vec{M}_{0 \rightarrow 1}^P \cdot \vec{z} = 0, \forall P \in \text{axe}(o\vec{z})$

$\left\{ T_{(1 \rightarrow 2)} \right\}_P = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{M}_{(1 \rightarrow 2)} \end{matrix} \right\}$ avec $\vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = 0$ et $\vec{M}_{0 \rightarrow 1}^P$ quelconque $\forall P \in \text{Espace}$.

Rq : pour différencier les moments on utilisera un exposant. Cette notation permet d'éviter d'avoir à choisir d'emblée un point d'expression des torseurs.

$\left\{ T_{(2 \rightarrow 3)} \right\}_P = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 3)} \\ \vec{M}_{(2 \rightarrow 3)} \end{matrix} \right\}$ avec $\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{X}_1 = 0$ et $\vec{M}_{2 \rightarrow 3}^P$ *quelconque* $\forall P \in \text{Espace}$.

2.8. Couple moteur.

Faire tourner l'ensemble à vitesse constante n'exclut pas que ce système soit déformable... ce qui est le cas si x et z sont des fonctions du temps :

Lorsque x et z sont des constantes, alors $C_m = 0$... (résultat évident).

Dans le cas contraire il faut calculer le moment dynamique d'un ensemble de 3 points matériels dont on a déjà déterminé les accélérations...

Le moment dynamique de l'ensemble en projection sur \vec{z} se définit comme :

$\delta_{\Sigma/R_0}^O \cdot \vec{z} = \sum_{i=1}^3 (\vec{OG}_i \wedge m_i \vec{\Gamma}(G_i \in i/0)) \cdot \vec{z}$

en détaillant : $\delta_{1/R_0}^O \cdot \vec{z} = ((a_1 \vec{X}_1 + c_1 \vec{z}) \wedge m_1 (-\dot{a}^2 a_1 \vec{X}_1)) \cdot \vec{z} = 0$

puis $\delta_{2/R_0}^O \cdot \vec{z} = ((-a_2 \vec{X}_1 + z\vec{z}) \wedge m_2 (z\ddot{z} + \dot{a}^2 a_2 \vec{X}_1)) \cdot \vec{z} = 0$

enfin, $\delta_{3/R_0}^O \cdot \vec{z} = \{(x\vec{X}_1 + b_3 \vec{Y}_3 + z\vec{z}) \wedge m_3 [(\ddot{x} - x\dot{a}^2) \vec{X}_1 + (\dot{x}\dot{a} + \dot{a}(\dot{x} - \dot{a}b_3 \cos \beta)) \vec{Y}_1 + \ddot{z} \vec{Z}]\} \cdot \vec{z} =$

$\delta_{3/R_0}^O \cdot \vec{z} = m_3 \{x(\dot{x}\dot{a} + \dot{a}(\dot{x} - \dot{a}b_3 \cos \beta)) \vec{X}_1 \cdot \vec{z} + b_3(\ddot{x} - x\dot{a}^2) \vec{Y}_1 \cdot \vec{z} + \ddot{z} \vec{Z} \cdot \vec{z}\}$

$\delta_{3/R_0}^O \cdot \vec{z} = m_3 \{x(\dot{x}\dot{a} + \dot{a}(\dot{x} - \dot{a}b_3 \cos \beta)) - b_3(\ddot{x} - x\dot{a}^2) \cos \beta\}$

$\delta_{3/R_0}^O \cdot \vec{z} = m_3 (2x\dot{x}\dot{a} - b_3 \ddot{x} \cos \beta)$

D'où l'expression du théorème du moment dynamique en projection sur \vec{z} : $\vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}^O \cdot \vec{z} = \delta_{\Sigma/R_0}^O \cdot \vec{z}$

Comme : $\vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}^O \cdot \vec{z} = C_m + \sum_{i=1}^3 (\vec{OG}_i \wedge (-m_i g) \vec{z}) \cdot \vec{z} + \vec{M}_{0 \rightarrow 1}^O \cdot \vec{z} = C_m + 0 + 0 = C_m$,

On en déduit : $C_m = m_3 (2x\dot{x}\dot{a} - b_3 \ddot{x} \cos \beta)$.

2.9. Etude dynamique de la partie préhensile.

Le système est toujours constitué des trois solides mais cette fois x et z sont des constantes et \dot{a} varie.

Le th du moment dynamique en projection sur \vec{z} donne toujours : $\vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}^O \cdot \vec{z} = \delta_{\Sigma/R_0}^O \cdot \vec{z}$ avec $\vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}^O \cdot \vec{z} = C_m$, mais cette fois : $\delta_{(o,\Sigma/R_0)}^O \cdot \vec{z} = I(\Sigma/O, \vec{z}) \ddot{\alpha}$ avec pour un ensemble de trois masses ponctuelles

$I(\Sigma/O, \vec{z}) = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + m_3 (x^2 + b_3^2 \cos^2 \beta)$

On en déduit : $C_m = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + m_3 (x^2 + b_3^2 \cos^2 \beta)) \ddot{\alpha}$

2.10. Calcul du temps minimum de récupération d'un échantillon.

Durée de la première rotation :

La loi de mouvement permet d'écrire : $\alpha_1 = \frac{\dot{\alpha}_{\max}}{2} t_a + \dot{\alpha}_{\max} t_u + \frac{\dot{\alpha}_{\max}}{2} t_a$ où $\frac{\dot{\alpha}_{\max}}{2}$ représente la vitesse

moyenne pendant les phase d'accélération et de freinage. Cela donne $t_u = \frac{\alpha_1}{\dot{\alpha}_{\max}} - t_a = \frac{\pi/2}{\pi/4} - 1 = 1s$. La

durée du premier mouvement est donc de 3s.

La loi de mouvement est identique pour les deux translations... on en déduit $t_u = \frac{d_1}{v_{\max}} - t_a = \frac{0.1}{0.05} - 1 = 1s$.

D'où encore une durée de mouvement égale à 3s.

Le temps nécessaire pour effectuer les allers retours est donc de 18 s.

3. Etude de la partie motrice.

3.1. Etude du basculement.

3.1.1. Rapport de réduction en sortie moteur.

$\eta = \omega_m / \omega_{roue} = \Phi_{roue} / \Phi_{moteur} = 40/8 = 5$

3.1.2. Basculement.

La zone d'appui du robot est définie dans le plan par le segment IJ. Le centre d'inertie de l'ensemble se trouvant plus près de la verticale du pont I que de celle de J, on pourra considérer intuitivement que le risque de basculement est donc plus élevé au freinage qu'à l'accélération.

3.1.3. Position de la partie préhensile.

Pour les raisons évoquées précédemment, il est souhaitable d'avoir le centre de gravité situé le plus bas possible pour éviter le basculement. On devra donc rouler avec la partie préhensile en position basse et rentrée.

3.1.4. Décélération maximale.

A la limite du basculement, l'action en J a une intensité nulle. Restent seulement l'action en I et le poids. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile peut alors s'exprimer en I :

$\left\{ \begin{matrix} M_T \gamma \vec{Y} \\ I \vec{G} \wedge (M_T \gamma) \vec{Y} \end{matrix} \right\}_I = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_I \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I + \left\{ \begin{matrix} -M_T g \vec{Z} \\ I \vec{G} \wedge (-M_T g) \vec{Z} \end{matrix} \right\}_I$

d'où l'on tire le théorème du moment dynamique :

$(a\vec{Y} + (b+R)\vec{Z}) \wedge (M_T \gamma) \vec{Y} = (a\vec{Y} + (b+R)\vec{Z}) \wedge (-M_T g) \vec{Z}$

qui permet d'exprimer $\gamma = \frac{ag}{(b+R)} = \frac{10.0.01}{0.03+0.01} = 2,5m/s^2$ (le signe s'explique par le fait que l'avance se fait dans le sens des Y négatifs)

3.2. Etude du patinage.

3.2.1. Etude du moteur à courant continu.

Dans le domaine de LAPLACE, et compte tenu des conditions initiales, les équations deviennent :

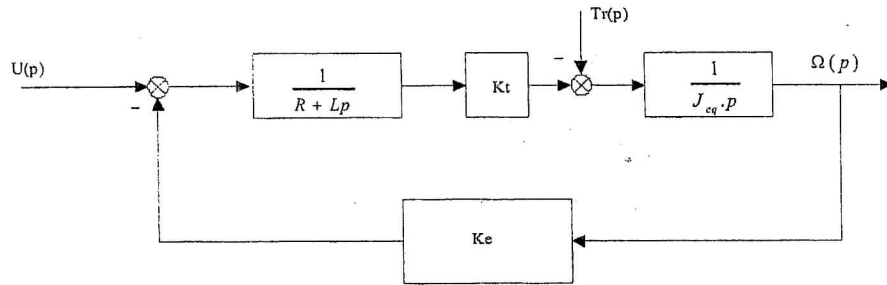
$$U(p) = (R + Lp)I(p) + E(p)$$

$$E(p) = K_e \Omega(p)$$

$$T(p) = K_t I(p)$$

$$T(p) - T_r(p) = J_{eq} p \Omega(p)$$

3.2.2. Schéma fonctionnel du moteur.



3.2.3. Inertie des roues motrices.

$$J_r = 1/2 MR^2 = 1/2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-2})^2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

3.2.4. Inertie équivalente.

L'ensemble est constitué d'un solide animé d'un mouvement de translation et de deux solides animés d'un mouvement de rotation. L'expression de son énergie cinétique est donc :

$$\sum E_c = \frac{1}{2} (M_T v^2 + J_r \omega_r^2 + J \omega_m^2)$$

Par ailleurs : $v = \omega_r R = \frac{\omega_m}{\eta} R$ donc $\sum E_c = \frac{1}{2} (M_T (\frac{R}{\eta})^2 + J_r \frac{1}{\eta^2} + J) \omega_m^2$

en conséquence : $J_{eq} = (M_T (\frac{R}{\eta})^2 + J_r \frac{1}{\eta^2} + J) = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$.

3.2.5. Fonction de transfert.

Par identification $K_1 = \frac{K_t}{R \cdot J_{eq}} = 5 \cdot 10^3 \text{ v}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $T_1 = \frac{L}{R} = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, $K_2 = K_e = 2 \cdot 10^{-2} \text{ v.s}$

$$FTBO(p) = H2(p) = \frac{K_1 K_2}{(1 + T_1 p) p} = \frac{100}{1 + 3,3 \cdot 10^{-4} p} p$$

3.2.6. Caractéristiques de l'asservissement.

Le diagramme fonctionnel précédent ne correspond pas à un système asservi. Il ne décrit qu'un

composant : le moteur. Cependant, il est possible d'en déterminer la transmittance :

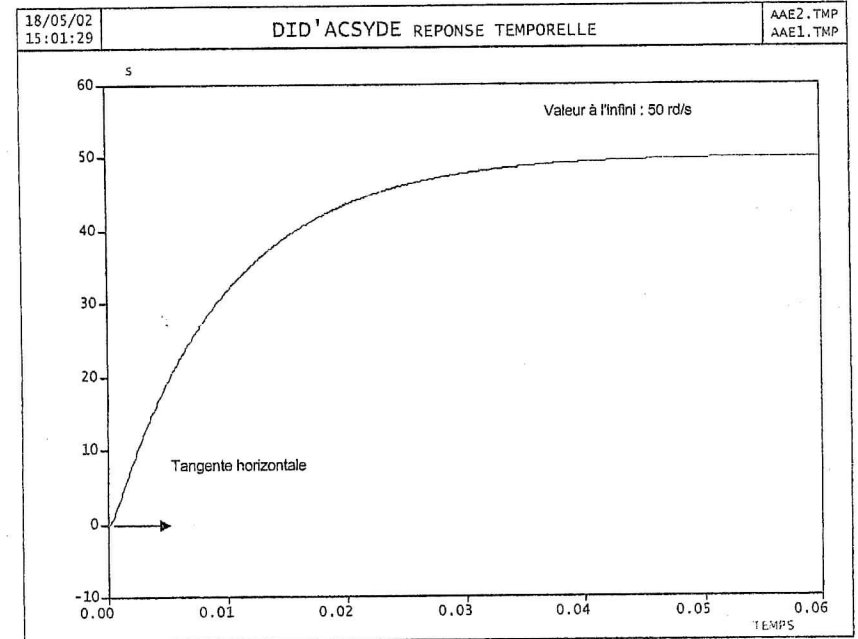
$$H1(p) = \frac{1}{\frac{1}{A} + B} = \frac{1}{K_2} \frac{1}{\left(1 + \frac{p(1+T_1 p)}{K_1 K_2}\right)} = \frac{1/K_2}{1 + p\left(\frac{1}{K_1 K_2}\right) + \left(\frac{T_1}{K_1 K_2}\right) p^2}$$

d'où l'on peut déduire

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2 T_1}} \approx 2,7, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{T_1}} \approx 550 \text{ rd/s}, \quad G = \frac{1}{K_2} = 50.$$

On peut aussi en conclure, du fait de la présence d'un intégrateur dans la chaîne directe que : $\odot_0 = 0$ et $\odot_v = 0,0 \underline{A}$

L'allure de la réponse indicielle est donc :



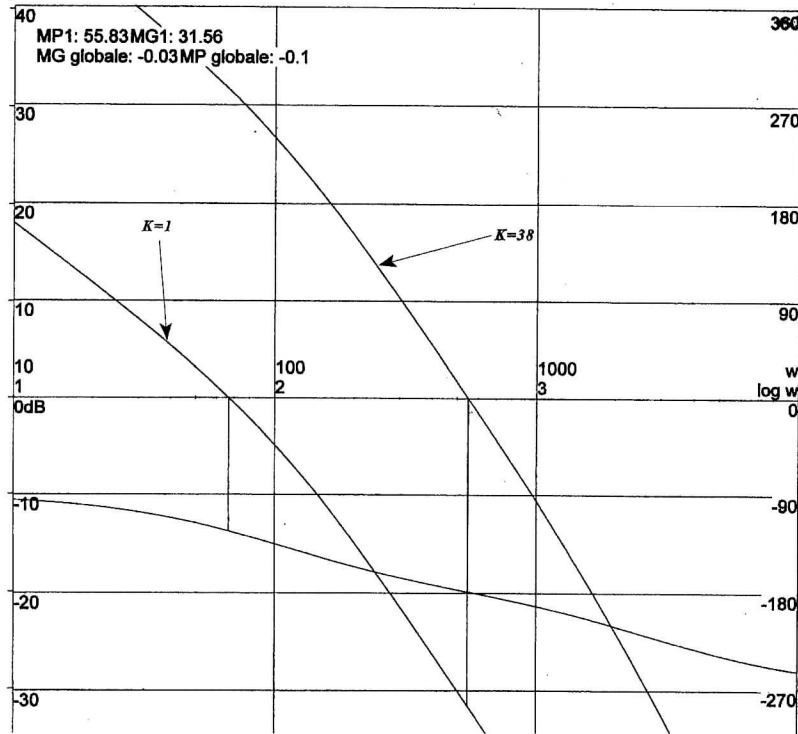
3.2.7. Vérification de la stabilité pour une consigne angulaire.

Pour qu'il y ait cohérence des valeurs au niveau du soustracteur il faut que pour $\alpha = 180^\circ = \pi$ en sortie c ait $u_{codeur} = 5v$. on en déduit $K_{codeur} = 5/\pi v$.

Pour $K=1$ la FTBO(p) s'exprime par : $S/\pi \left(\frac{50}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 p^2} \right) \frac{1}{p} = \frac{80}{p} \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 p^2}$ avec

$\zeta = 2,7$ et $\omega_0 = 550 \text{ rd/s}$ Le tracé de Bode s'obtient en superposant les diagrammes de $\frac{80}{p}$ et de

$$1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 p^2$$



Le système sera instable si pour un déphasage de -180° le gain est positif. On peut donc relever la courbe de 31.5 dB en ajoutant 20 log K. La valeur maxi de K est donc 37.8.

3.2.8. Contact roue motrice / aire de jeu : détermination des efforts de contact.

Le PFD appliqué au mobile donne : $\{T_{0 \rightarrow \Sigma}\} + \{T'_{0 \rightarrow \Sigma}\} + \{P_{\Sigma}\} = \{D_{\Sigma/0}\}$, en tenant compte respectivement des actions en I, en J, et du poids. Au point G il s'exprime par :

Théorème de la résultante :

$$\begin{aligned} -T_I &= -M\Gamma \\ N_I + N_J - Mg &= 0 \end{aligned}$$

(est orienté comme V. T_I a la même orientation que)

Théorème du moment : $-N_I \cdot a + N_J \cdot (c-a) - T_I(R+b) = 0$

De plus, la loi de Coulomb permet d'écrire: $\mu \geq \frac{T_I}{N_I}$

Remarque : Ici, on a pris la réaction du sol au point I telle que $\vec{R}_{I \text{ sol} \rightarrow \text{robot}} = -T_I \vec{Y} + N_I \vec{Z}$ avec $T_I > 0$

3.2.9. Relation entre l'accélération et le facteur de frottement.

Après substitution on obtient $\Gamma \leq \mu \frac{(c-a)}{(c + \mu(b+R))} g$

Nota : On vérifie facilement que :

si $a=c$ (G au droit du point J), alors $\Gamma=0$; ce qui est logique puisque la roue motrice est déchargée de tout effort presseur, par ailleurs, si $a=0$ et si $R+b=0$ alors $\Gamma \leq \mu g$, ce qui serait vrai dans le cas de la dynamique du point matériel, enfin la présence du terme $b+R$ tient compte de l'effet de « bascule » qui « soulage » la roue avant limitant ainsi sa motricité.

3.2.10. Courbe expérimentale : réponse à un échelon de 5 volts.

Allure de la courbe d'accélération

Pour déterminer l'accélération maxi on trace la tangente à la courbe pour $t \approx 0.01$ s. On obtient :

$$\dot{\omega}_{\max t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{220 \text{rd/s}}{0.1}$$

3.2.11. Condition de non patinage.

La limite de patinage est donnée par la relation 3.2.9

Comme $\Gamma_{\max t} = \frac{\dot{\omega}_{\max t}}{\eta} R = 4,4 \text{ms}^{-2}$,

Alors il faut que $\mu \geq \frac{\Gamma c}{g(c-a) - \Gamma(b+R)} \approx 0.6$, ce qui est acceptable pour un contact élastomère – stratifié... (des essais à domicile ont donné $\mu \approx 1$)