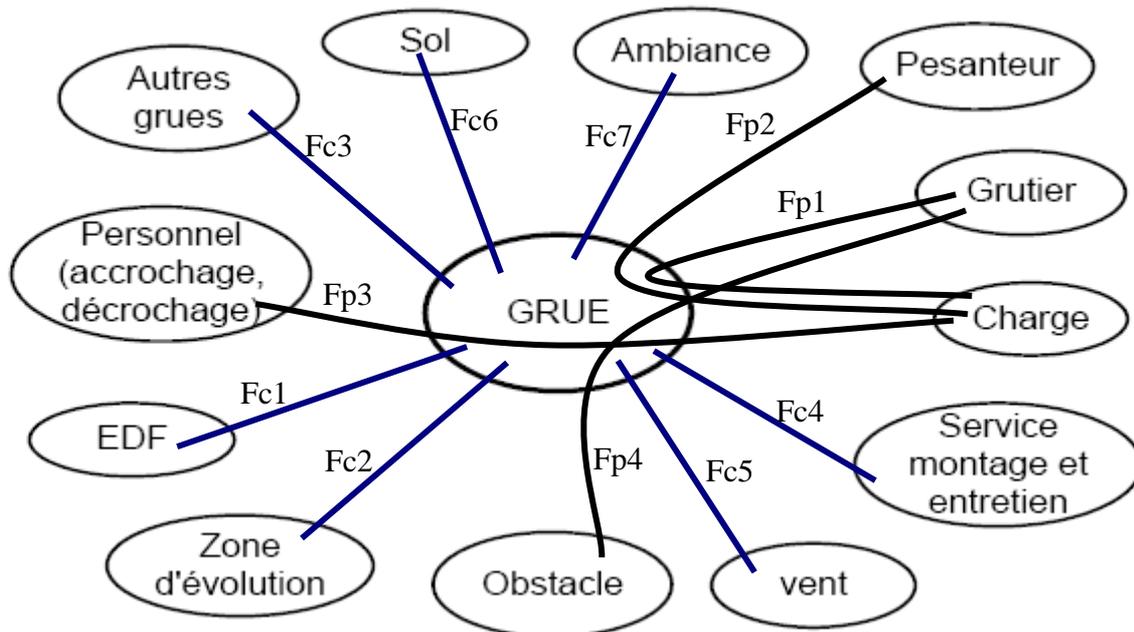


**QUESTION 1a**

Déplacer une charge rapidement, en toute sécurité, dans un espace défini.

**QUESTION 1b**

Fonctions de Service :



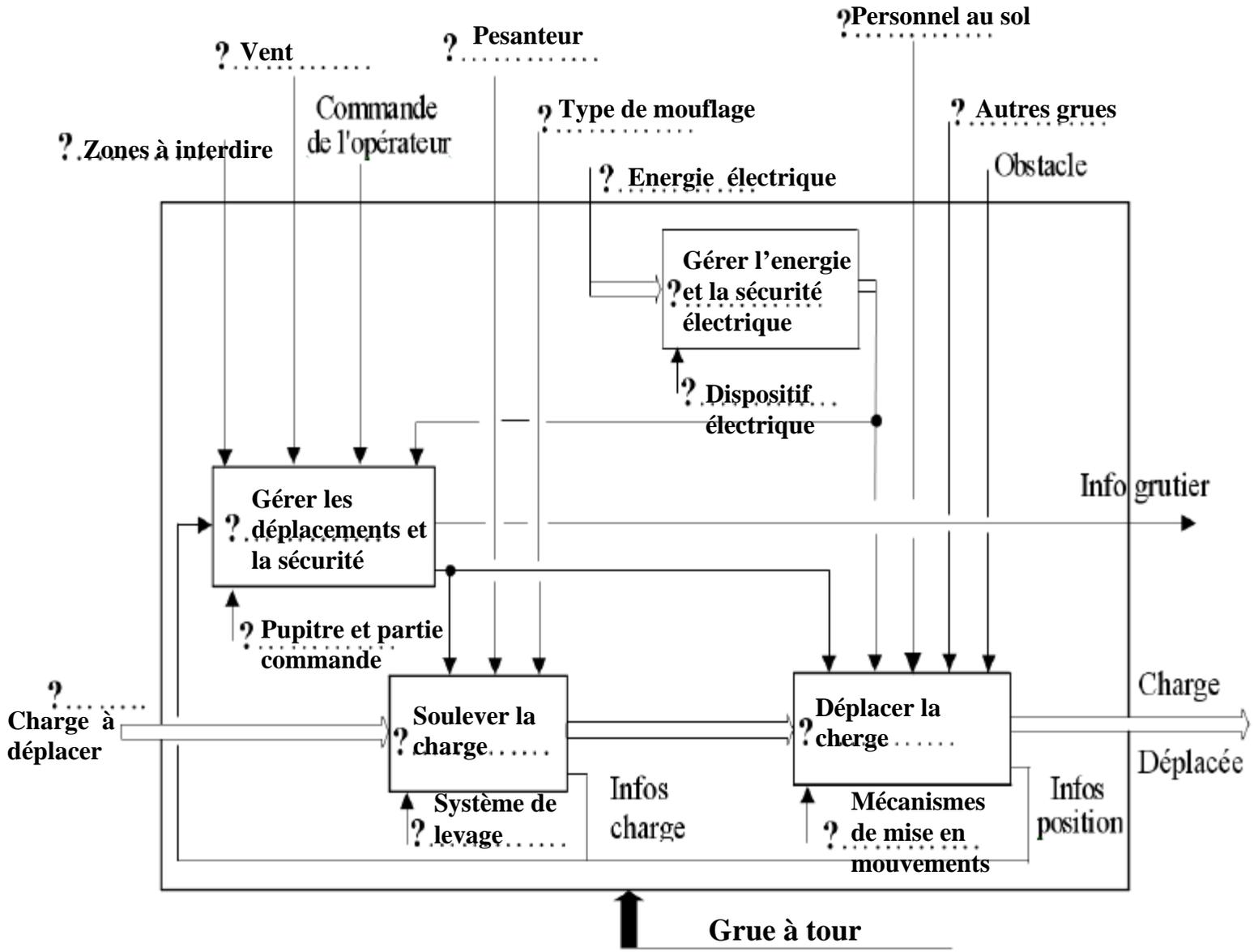
Fonctions de service principales (d'interaction) :

- Fp1 : Déplacer une charge sur commande du grutier
- Fp2 : Vaincre les effets de la pesanteur sur la charge
- Fp3 : Permettre une manipulation facile et rapide de la charge par le personnel au sol
- Fc2 : Mettre le grutier dans des bonnes conditions de travail
- Fp4 : Offrir au grutier une bonne visibilité des obstacles éventuels

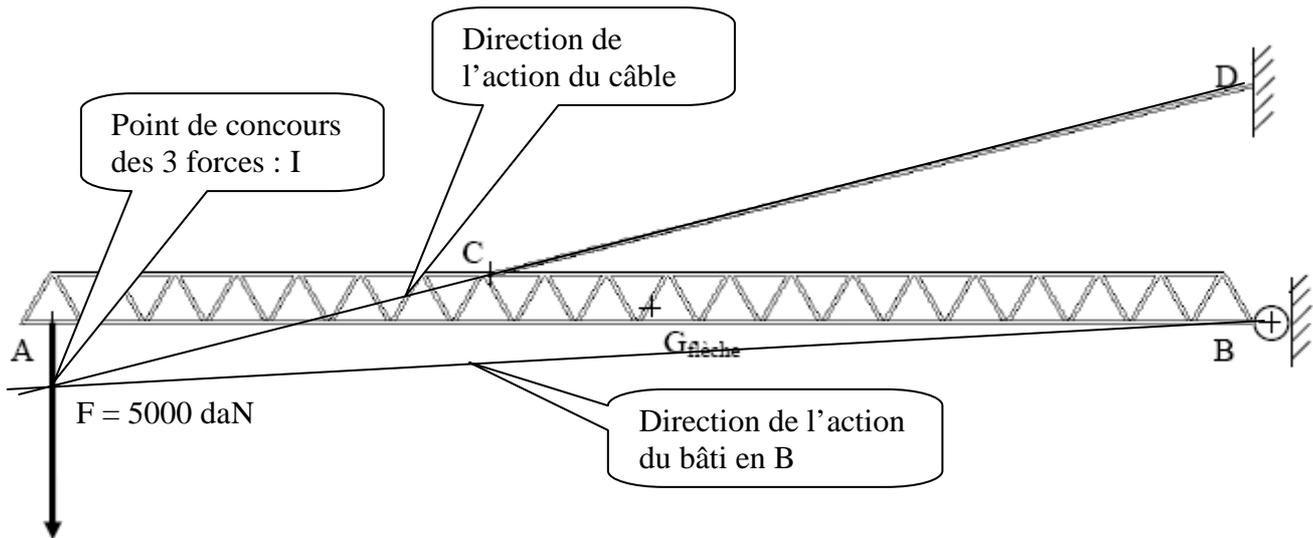
Fonctions contraintes (d'adaptation) :

- Fc1 : Permettre le raccordement au réseau EDF pour l'énergie
- Fc2 : Restreindre les mouvements admissibles à la zone d'évolution
- Fc3 : Avoir des mouvements compatibles avec la présence d'autres grues.
- Fc4 : Etre rapidement montable et réparable par le service montage et entretien.
- Fc5 : Evaluer les risques liés au vent
- Fc6 : Assurer la stabilité au sol
- Fc7 : Résister à l'ambiance du chantier

QUESTION 2



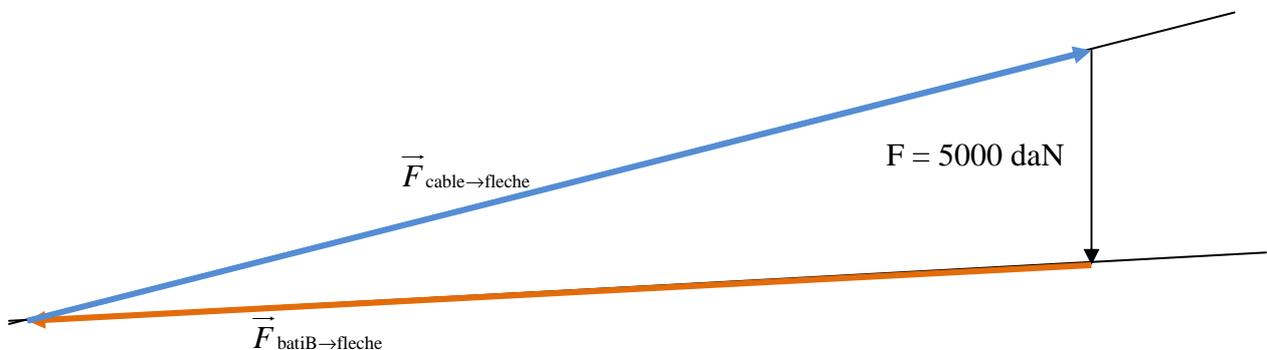
QUESTION 3a



En négligeant le poids propre de la flèche, celle-ci est soumise à 3 forces (glisseurs) qui doivent donc être concourantes et de somme nulle.

- $F$  : la charge connue
- L'action du câble sur la flèche de direction, celle du câble, soit la droite (DC)
- L'action du bâti sur la flèche en B par la liaison pivot : un glisseur passant par B

Connaissant deux directions, on en déduit le point de concours des trois forces (I). On en déduit la direction de l'action du bâti sur la flèche en B. Il ne reste plus qu'à réaliser graphiquement la somme vectorielle nulle de ces trois forces :



### QUESTION 3b

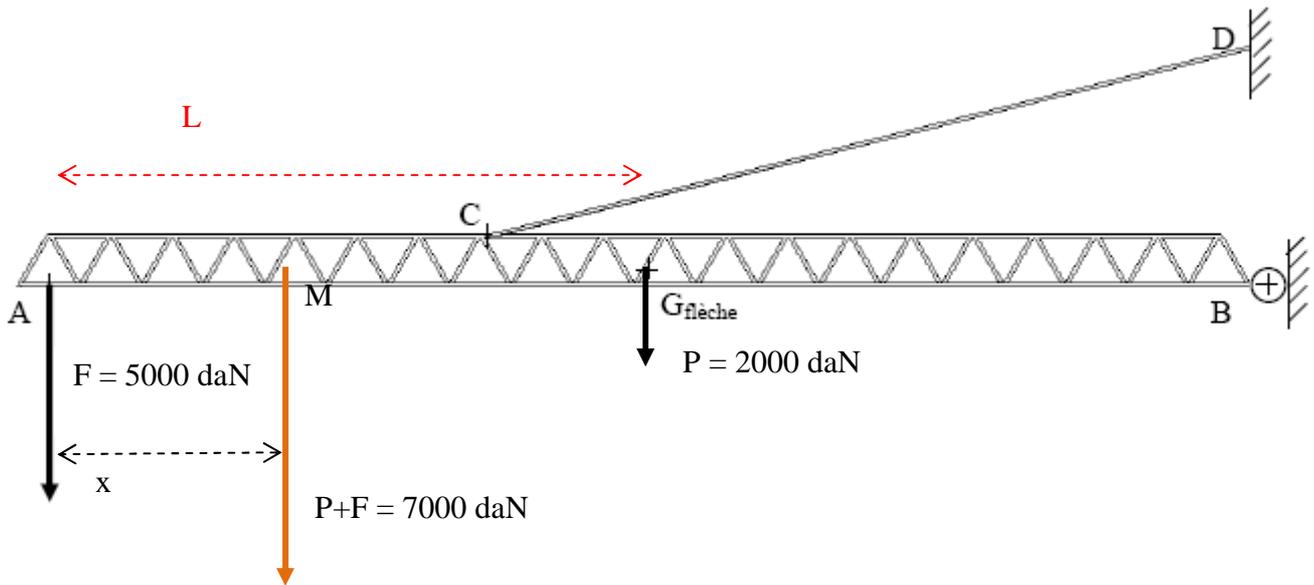
En tenant compte du poids de la flèche, on a alors un système soumis à 4 forces.

Il faut donc se ramener à un système soumis à 3 forces en déterminant l'action mécanique résultante de la charge + le poids de la flèche.

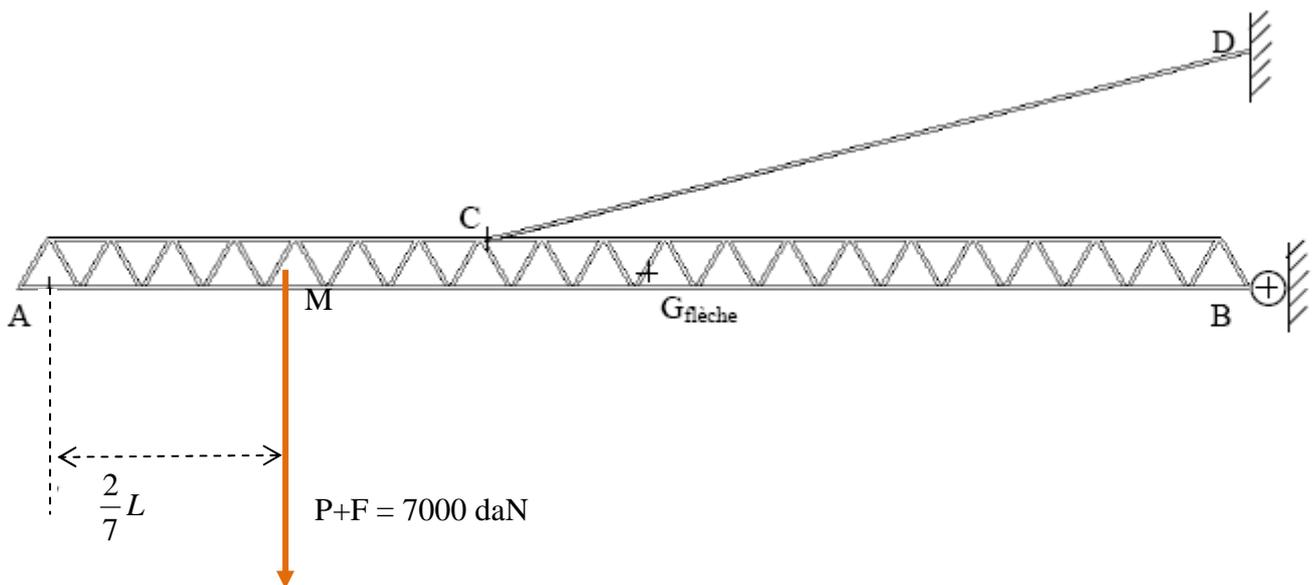
Ce glisseur a pour résultante 7000 daN vertical vers le bas (somme des 2 forces) et passe par M, barycentre de (A, 5000) et  $G_f$ , 3000) voir figure suivante, tel que :

$$5000x = 2000(L - x)$$

$$\text{Soit } x = \frac{2}{7}L$$



Le problème graphique est donc le suivant :



**QUESTION 4**

On écrit l'équilibre du bout de flèche en K, milieu de  $[H_2H_3]$  :

On pose  $G_\lambda$  le centre de gravité du bout de flèche.

$${}_{H_1} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{pmatrix} + {}_{H_2} \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{pmatrix} + {}_{H_3} \begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ Y_3 & 0 \\ Z_3 & 0 \end{pmatrix} + {}_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5000 & 0 \end{pmatrix} + {}_{G_\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 100\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul des moments en K :

Pour l'action mécanique en  $H_1$  :  $\vec{M}_K = \cancel{\vec{M}_{H_1}} + \overline{KH_1} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}Y_1 \\ +\sqrt{3}X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour l'action mécanique en  $H_2$  :  $\vec{M}_K = \cancel{\vec{M}_{H_2}} + \overline{KH_2} \wedge \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_2 \\ 0 \\ X_2 \end{pmatrix}$

Pour l'action mécanique en  $H_3$  :  $\vec{M}_K = \cancel{\vec{M}_{H_3}} + \overline{KH_3} \wedge \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_3 \\ 0 \\ -X_3 \end{pmatrix}$

Pour l'action mécanique en A :  $\vec{M}_K = \cancel{\vec{M}_A} + \overline{KA} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5000\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour l'action mécanique en  $G_\lambda$  :  $\vec{M}_K = \cancel{\vec{M}_{G_\lambda}} + \overline{KG_\lambda} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50\lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit :

$${}_K \begin{pmatrix} X_1 & Y_1\sqrt{3} \\ Y_1 & -X_1\sqrt{3} \\ Z_1 & 0 \end{pmatrix} + {}_K \begin{pmatrix} X_2 & -Z_2 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & X_2 \end{pmatrix} + {}_K \begin{pmatrix} X_3 & Z_3 \\ Y_3 & 0 \\ Z_3 & -X_3 \end{pmatrix} + {}_K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5000\lambda \\ 5000 & 0 \end{pmatrix} + {}_K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -50\lambda^2 \\ 100\lambda & 0 \end{pmatrix} = {}_K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

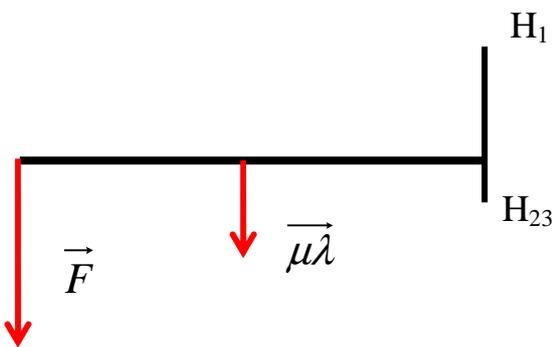
Ce qui donne les six équations suivantes, en tenant compte de la symétrie donnée dans l'énoncé :  $X_2 = X_3$  :

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 0 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \\ Y_1\sqrt{3} - Z_2 + Z_3 = 0 \\ -X_1\sqrt{3} - 5000\lambda - 50\lambda^2 = 0 \\ X_2 - X_2 = 0 \end{cases}$$

Seule nous intéresse la première et la cinquième, (les autres permettent de constater l'hyperstaticité du modèle).

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 0 \\ -X_1\sqrt{3} - 5000\lambda - 50\lambda^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = -\frac{50\lambda}{\sqrt{3}}(100 + \lambda) \\ X_2 = \frac{25\lambda}{\sqrt{3}}(100 + \lambda) \end{cases}$$

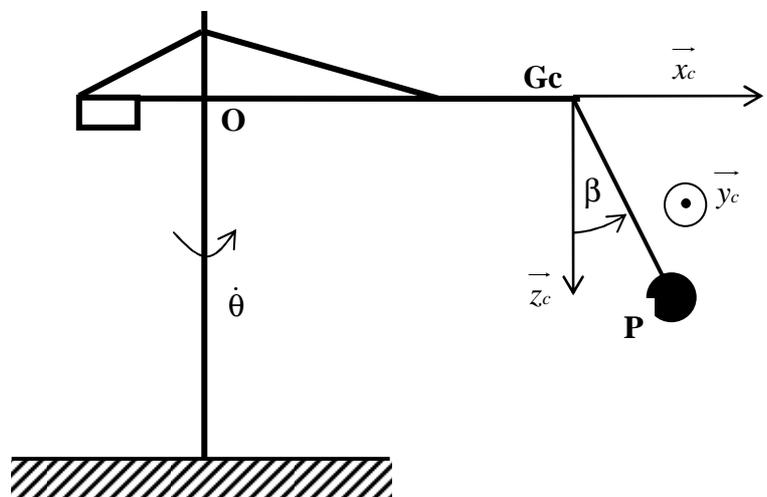
Avec l'hypothèse du problème plan on simplifie nettement la résolution :



Théorème du moment statique en  $H_{23}$  :  $-F\lambda - \mu \frac{\lambda^2}{2} - \sqrt{3}X_1 = 0$  donne  $X_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{3}}(F + \mu \frac{\lambda}{2})$

### QUESTION 5

On applique le théorème du moment dynamique à l'ensemble (câble + charge) en projection suivant  $(G_c, \bar{y}_c)$ , ainsi l'inconnue de liaison de la pivot avec la flèche est nulle :



$$\overrightarrow{\delta}_{G_c} (\text{charge+cable}/0) \cdot \vec{y}_C = \overrightarrow{M}_{G_c} (\vec{g} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C + \underbrace{\overrightarrow{M}_{G_c} (\text{flèche} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C}_0 = \overrightarrow{M}_{G_c} (\vec{g} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C$$

Calcul de la projection du moment :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{G_c} (\vec{g} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C &= \left[ \overrightarrow{M}_P (\vec{g} \rightarrow \text{charge}) + \overrightarrow{G_C P} \wedge Mg \vec{z}_C \right] \cdot \vec{y}_C \\ &= Mg [\vec{z}_C \wedge \vec{y}_C] \cdot \overrightarrow{G_C P} \\ &= -Mg \vec{x}_C \cdot \overrightarrow{G_C P} \\ &= -MgL \sin \beta \\ &= -MgL \beta \end{aligned}$$

Calcul de l'accélération :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= R\vec{x}_C + L\vec{z}_P \quad \text{avec} \quad \vec{z}_P = \cos \beta \vec{z}_C + \sin \beta \vec{x}_C \\ \overrightarrow{V}(P/0) &= R\dot{\theta} \vec{y}_C + L\dot{\theta} \sin \beta \vec{y}_C = R\dot{\theta} \vec{y}_C + L\dot{\theta} \beta \vec{y}_C \quad \text{avec} \quad \dot{\theta} = \text{constante} \\ \overrightarrow{a}(P/0) &= -(R + L\beta) \dot{\theta}^2 \vec{x}_C \end{aligned}$$

Calcul de la projection du moment dynamique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{G_c} (\text{charge+cable}/0) \cdot \vec{y}_C &= \left[ \overrightarrow{G_C P} \wedge M \overrightarrow{a}(P/0) \right] \cdot \vec{y}_C \\ &= - \left[ \overrightarrow{G_C P} \wedge M (R + L\beta) \dot{\theta}^2 \vec{x}_C \right] \cdot \vec{y}_C \\ &= -M (R + L\beta) \dot{\theta}^2 (\vec{x}_C \wedge \vec{y}_C) \cdot \overrightarrow{G_C P} \\ &= -M (R + L\beta) \dot{\theta}^2 \vec{z}_C \cdot \overrightarrow{G_C P} \\ &= -M (R + L\beta) \dot{\theta}^2 L \cos \beta = -M (R + L\beta) \dot{\theta}^2 L \end{aligned}$$

Soit :  $-M (R + L\beta) \dot{\theta}^2 L = -MgL\beta$ , d'où :

$$\beta = \frac{R\dot{\theta}^2}{g - L\dot{\theta}^2}$$

### QUESTION 6

$$\overrightarrow{G_{c0} G_{ct}} = R\theta \vec{y}_C$$

$\ddot{\theta} = \text{constante}$ , donc en intégrant deux fois avec des conditions initiales non précisées dans l'énoncé mais sans doute nulle ( $\dot{\theta}(t=0) = 0$  et  $\theta(t=0) = 0$ ), on obtient :

$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t$  et  $\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta}t^2$ , ce qui donne :

$$\overrightarrow{G_{c0} G_{ct}} = \frac{R\ddot{\theta}t^2}{2} \vec{y}_C$$

### QUESTION 7 et 9

$$M\vec{a}(\text{charge}/0) \cdot \vec{y}_C = \vec{R}(\vec{g} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C + \vec{R}(\text{cable} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C$$

Calcul de l'accélération (voir figure 8 du sujet) :

$$\vec{OP} = \vec{OG}_{C0} + \vec{G}_{C0}\vec{G}_{Ct} + \vec{G}_{Ct}\vec{P} = \underbrace{\vec{OG}_{C0}}_{\text{vecteur fixe}} + \frac{R\ddot{\theta}t^2}{2} \vec{y}_C + L \underbrace{\cos \alpha}_1 \vec{z}_C + L \underbrace{\sin \alpha}_\alpha \vec{y}_C$$

On « ne dérive pas »  $\vec{y}_C$  puisque celui-ci est considéré constant  $\vec{y}_C = \vec{y}_{C0}$ , soit

$$\vec{V}(P/0) = (R\dot{\theta}t - L\dot{\alpha}) \vec{y}_C$$

D'où pour les mêmes raisons :

$$\vec{a}(P/0) = (R\ddot{\theta} - L\ddot{\alpha}) \vec{y}_C$$

Calcul des projections d'action mécanique :

$$\vec{R}(\vec{g} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C = 0$$

$$\vec{R}(\text{cable} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{y}_C = T_{\text{cable}} \sin \alpha = T \alpha$$

Or en appliquant le PFD à la charge suivant  $\vec{z}_C$ , on obtient :

$$\underbrace{M\vec{a}(\text{charge}/0) \cdot \vec{z}_C}_0 = \underbrace{\vec{R}(\vec{g} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{z}_C}_{Mg} + \underbrace{\vec{R}(\text{cable} \rightarrow \text{charge}) \cdot \vec{z}_C}_{-T \cos \alpha = -T}, \text{ d'où : } T = Mg,$$

ce qui donne sur  $\vec{y}_C$ , l'équation différentielle :  $R\ddot{\theta} - L\ddot{\alpha} = g\alpha$

On obtient :  $L \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + g\alpha - R\ddot{\theta} = 0$

Il est bien sûr impossible de trouver l'équation différentielle demandée qui n'est pas homogène !!!

### QUESTION 8

Puisque on « ne dérive pas »  $\vec{y}_C$  :

$$\frac{d^2 \vec{P}_0\vec{P}_t \cdot \vec{y}_C}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{P}_0\vec{P}_t}{dt^2} \cdot \vec{y}_C = \vec{a}(P/0) \cdot \vec{y}_C = R\ddot{\theta} - L\ddot{\alpha} = g\alpha, \text{ soit :}$$

$$\vec{P}_0\vec{P}_t \cdot \vec{y}_C = g \int_0^t \int_0^t \alpha(u) du$$

Autre résultat en utilisant Q6 :  $\vec{P}_0\vec{P}_t \cdot \vec{y}_C = \vec{G}_{C0}\vec{G}_{Ct} \cdot \vec{y}_C - L \sin \alpha$

soit :  $\vec{P}_0\vec{P}_t \cdot \vec{y}_C = \frac{R\ddot{\theta}t^2}{2} - L\alpha$

### QUESTION 10

$L \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + g\alpha - R\ddot{\theta} = 0$  a pour solution particulière

$\alpha = \frac{R\ddot{\theta}}{g}$ , pour solutions de l'équation sans second membre :  $\alpha = \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t$  ou  $\sin \sqrt{\frac{g}{L}}t$

On a donc comme équation du mouvement :  $\alpha = \frac{R\ddot{\theta}}{g} + a \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t + b \sin \sqrt{\frac{g}{L}}t$

Or  $\alpha(0) = 0$  impose  $a = -\frac{R\ddot{\theta}}{g}$ , et  $\dot{\alpha}(0) = 0$  impose  $b = 0$

D'où :  $\alpha = \frac{R\ddot{\theta}}{g} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t \right)$ .

Autre solution avec transformée de Laplace :

$(Lp^2 + g)\alpha(p) = \frac{R\ddot{\theta}}{p}$  (accélération angulaire en échelon)

D'où :  $\alpha(p) = \frac{R\ddot{\theta}}{g} \frac{1}{p(1 + \frac{L}{g}p^2)}$

or dans Laplace :  $\frac{1}{p \left[ 1 + \frac{p^2}{\omega^2} \right]}$  a pour transformée inverse :  $1 - \cos \omega t$  donne le même résultat.

**QUESTION 11**

On réécrit un PFD :

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la charge en mouvement le long de la flèche :

$M\vec{a}(\text{charge}/0) = M\vec{g} + \vec{T}_{\text{cable}}$

Sur la figure de travail la normale  $\beta > 0$ , alors qu'on s'attend qualitativement à le trouver dans l'autre sens (pour une accélération positive), c'est-à-dire négatif :

$\vec{OP} = x\vec{x}_c + L \sin \beta \vec{x}_c + L \cos \beta \vec{z}_c$ , d'où avec l'approximation des petits angles :

$\vec{OP} = (x + L\beta)\vec{x}_c + L\vec{z}_c$ , soit :

$M(\ddot{x} + L\ddot{\beta})\vec{x}_c = Mg\vec{z}_c - T(\cos \beta \vec{z}_c + \sin \beta \vec{x}_c) = (Mg - T)\vec{z}_c - T\beta \vec{x}_c$

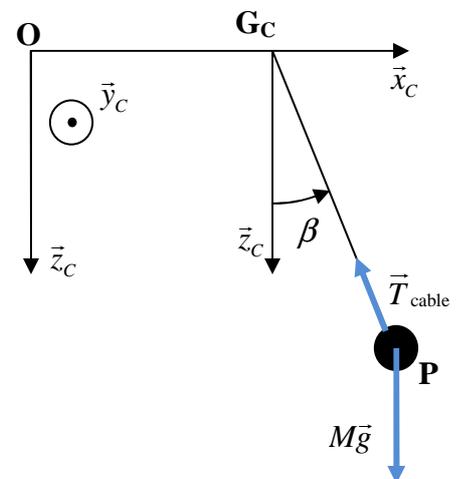
Ce qui donne en projection sur  $\vec{z}_c$  :  $Mg = T$

Et en projection sur  $\vec{x}_c$  :  $\ddot{x} + L\ddot{\beta} = -g\beta$

Soit l'équation différentielle :  $L\ddot{\beta} + g\beta = -\ddot{x}$

La solution particulière vaut  $\beta = -\frac{\ddot{x}}{g}$

Les solutions de l'équation sans second membre sont :  $\beta = \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t$  ou  $\sin \sqrt{\frac{g}{L}}t$



On a donc comme équation du mouvement :  $\beta = -\frac{\ddot{x}}{g} + a \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t + b \sin \sqrt{\frac{g}{L}}t$

Or  $\beta(0) = 0$  impose  $a = \frac{\ddot{x}}{g}$ , et  $\dot{\beta}(0) = 0$  impose  $b = 0$

D'où :  $\beta = -\frac{\ddot{x}}{g} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t \right)$ , soit la même expression que celle trouvée à Q10 en remplaçant  $\alpha$  par  $\beta$  et  $R\ddot{\theta}$  par  $-\ddot{x}$

### QUESTION 12

Suivant les cas de mouvements, le déport vaut  $0,5m = L\alpha = L\beta$

- En ne gardant que la solution particulière (soit en régime « stabilisé ») de la question précédente, on trouve :  $0,5m = L\beta = L\frac{\ddot{x}_{\max}}{g}$ , soit  $\ddot{x}_{\max} = \frac{0,5g}{L} = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$

- En ne gardant que la solution particulière de la question 7 on a un régime permanent:  $\alpha = \frac{R\ddot{\theta}_{\max}}{g}$

Soit :  $\ddot{\theta}_{\max} = \frac{g\alpha}{R} = \frac{0,5g}{RL} = 0,025 \text{ rad.s}^{-2}$

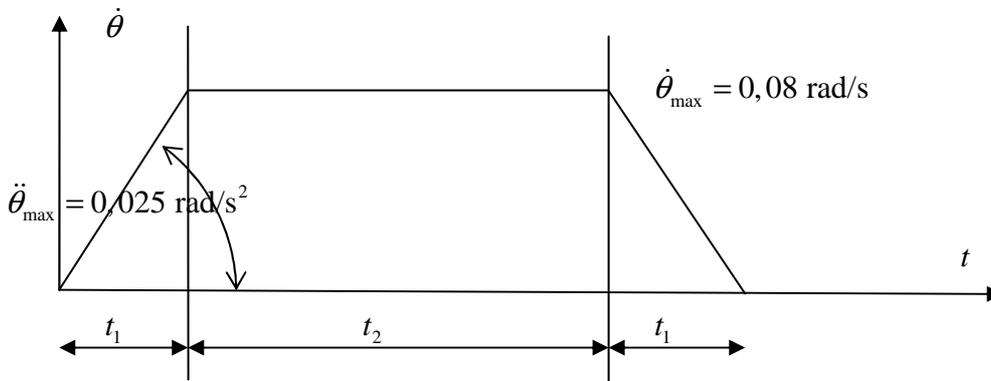
- D'après Q5, on a  $\beta = \frac{0,5}{L} = \frac{R\dot{\theta}^2}{g - L\dot{\theta}^2}$ , soit  $\dot{\theta}^2_{\max} = \frac{g}{L(2R+1)}$ . D'où :

$\dot{\theta}_{\max} = 0,16 \text{ m.s}^{-1}$

### QUESTION 13

a)

On impose donc un déplacement en trapèze pour la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  :



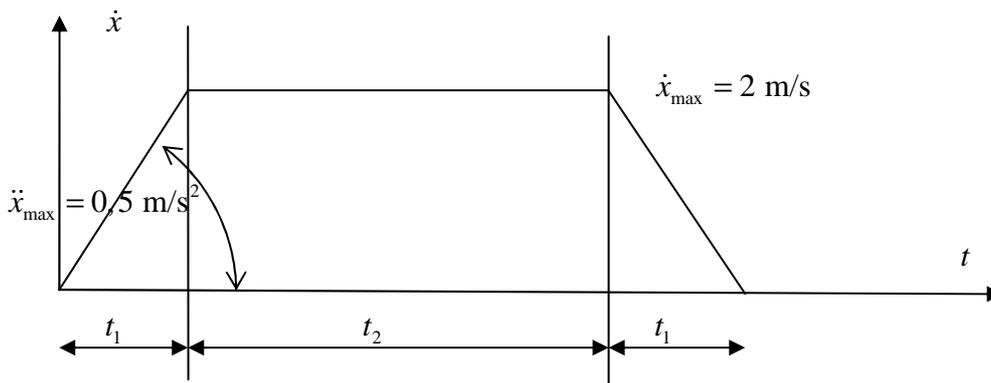
L'aire du trapèze correspondant à l'intégrale de la vitesse, c'est-à-dire à l'amplitude, soit  $\pi$ , on a  $\pi = \dot{\theta}_{\max} (t_1 + t_2)$

- $t_1$  correspond au temps qu'il faut pour atteindre une vitesse de 0,08 rad/s avec une accélération constante de  $0,025 \text{ rad/s}^2$ , soit  $t_1 = \frac{0,08}{0,025} = 3,2 \text{ s}$
- $\pi = \dot{\theta}_{\max} (t_1 + t_2)$ , soit  $t_2 = \frac{\pi}{\dot{\theta}_{\max}} - t_1 = 39,3 - t_1$

Le temps total de déplacement valant  $T_\pi = 2t_1 + t_2$ , on trouve  $T_\pi = 42,5 \text{ secondes}$

b)

On a le même principe de déplacement avec les valeurs ci-dessous :



L'aire du trapèze correspondant à l'intégrale de la vitesse, c'est-à-dire à l'amplitude, soit  $20 \text{ m}$ , on a  $20 = 2(t_1 + t_2)$

- $t_1$  correspond au temps qu'il faut pour atteindre une vitesse de 2 m/s avec une accélération constante de  $0,5 \text{ rad/s}^2$ , soit  $t_1 = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ s}$
- $20 = 2(t_1 + t_2)$ , soit  $t_2 = \frac{20}{2} - t_1 = 10 - t_1$

Le temps total de déplacement valant  $T_{20} = 2t_1 + t_2$ , on trouve  $T_{20} = 14 \text{ secondes}$

c)

Pour augmenter la productivité on peut effectuer une translation de la flèche soit 20 m pendant un demi tour de rotation.

#### QUESTION 14

a)

Chaque étage réduit la vitesse de rotation mais augmente le couple, donc pour transmettre des couples plus importants en gardant des pressions de contact raisonnables entre les dents des engrenages, il faut augmenter les surfaces de contact en allongeant les « lignes » de contact entre dents d'engrenages, c'est-à-dire en augmentant l'épaisseur des engrenages.

b)

On a trois étages épicycloïdaux à 2 engrènements chacun, soit 6 engrènements. Plus un engrènement pour le train simple. Soit en tout 7 engrènements.

Le rendement global vaut donc :  $\rho = (0,98)^7 = 0,87$  (87%)

QUESTION 15

On peut tracer un schéma d'un étage :

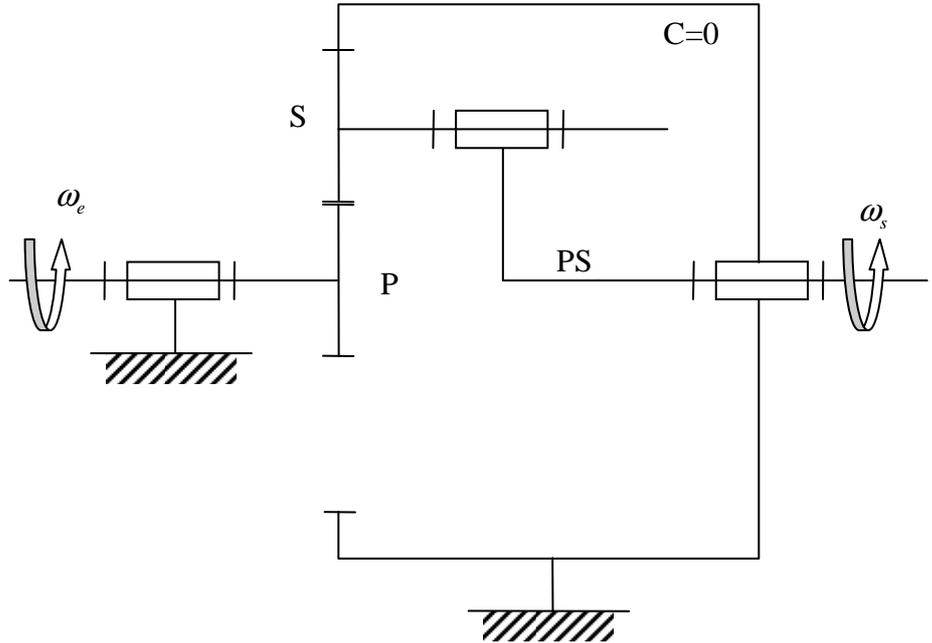
En appliquant la relation de Willis ci-contre, on a :

$$\frac{\omega_{P/PS}}{\omega_{C/PS}} = \frac{\omega_{P/PS}}{\omega_{0/PS}} = -\frac{Z_C Z_S}{Z_S Z_P} = -\frac{Z_C}{Z_P}$$

Ce qui donne avec les mouvements d'entrée et de sortie choisis :

$$\frac{\omega_e - \omega_s}{-\omega_s} = -\frac{Z_C}{Z_P}$$

D'où : 
$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{Z_P}{Z_P + Z_C} = \frac{1}{6}$$



QUESTION 16

On fera attention à noter que l'énoncé demande le rapport de l'entrée sur la sortie !!!

$$\mu = \frac{\omega_{moteur}}{\omega_{fleche}} = 6^3 \times \frac{153}{18} = 1836$$

QUESTION 17

a)  
On admet le plan  $(O; \vec{x}_f, \vec{z}_f)$ , comme plan de symétrie, donc les produits d'inertie « en y » sont nuls, à savoir  $D=F=0$ , ce qui donne bien la forme fournie.

b)  
 $I_{\Sigma} = I_{S1} + I_{S2} + I_M + I_P$   
Il suffit alors d'appliquer Huygens pour avoir chacune des inerties, soit :

$$I_{S1} = C_1 + \frac{M_1 L_f^2}{4}$$

$$I_{S2} = C_2 + 0$$

$$I_{S1} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) + m\left(d + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$I_{S1} = 0 + MR^2$$

Soit, pour l'inertie demandée : 
$$I_{\Sigma} = C_1 + \frac{M_1 L_f^2}{4} + C_2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2) + m\left(d + \frac{a}{2}\right)^2 + MR^2$$

c)

L'énergie cinétique s'écrit alors :  $E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2} I_\Sigma \omega_{flèche}^2$ , soit en introduisant le rapport de réduction du réducteur :

$$E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \frac{I_\Sigma}{\mu^2} \omega_{moteur}^2 = \frac{1}{2} I_\mu \omega_{moteur}^2$$

D'où

$$I_\mu = \frac{I_\Sigma}{\mu^2}$$

### QUESTION 18

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {moteur+reducteur+ens tournant}

$$E_C = \frac{1}{2} (I_m + I_\mu) \omega_{moteur}^2$$

$$P_{ext} = \underbrace{P(\text{moteur} \rightarrow \text{arbre}/0)}_{C_m \omega_m} + \underbrace{P(\bar{g} \rightarrow \text{ens tournant}/0)}_0 + \underbrace{P(\text{vent} \rightarrow \text{ens tournant}/0)}_{C_v \omega_{flèche}}$$

$P_{int} = -(1-\eta) C_m \omega_m$  correspond à la puissance perdue dans le réducteur

$$D'où : (I_m + I_\mu) \omega_{moteur} \dot{\omega}_{moteur} = C_m \omega_m + C_v \omega_{flèche} - (1-\eta) C_m \omega_m = \eta C_m \omega_m + C_v \omega_{flèche} = \left( \eta C_m + \frac{C_v}{\mu} \right) \omega_m$$

$$\text{Soit : } (I_m + I_\mu) \dot{\omega}_{moteur} = \eta C_m + \frac{C_v}{\mu}$$

Or  $\dot{\omega}_{moteur} = \mu \dot{\omega}_{flèche}$ , d'où :

$$C_m = \frac{1}{\eta} \left[ (I_m + I_\mu) \mu \dot{\omega}_{flèche} - \frac{C_v}{\mu} \right]$$

Suivant la position relative de la flèche par rapport à la direction du vent sur le site  $C_v$  est positif ou négatif.

### QUESTION 19

$$\vec{V}_{apparent}(M \in fleche) = \vec{V}_{vent} - \vec{V}(M \in fleche/0), \text{ d'où avec } \overline{OM} = r\vec{u} \Rightarrow \vec{V}(M \in fleche/0) = r\dot{\theta}\vec{v}$$

$$\vec{V}_{apparent}(M \in fleche) = V_v \vec{y} - r\dot{\theta}\vec{v}$$

Ce qui donne la répartition suivante :

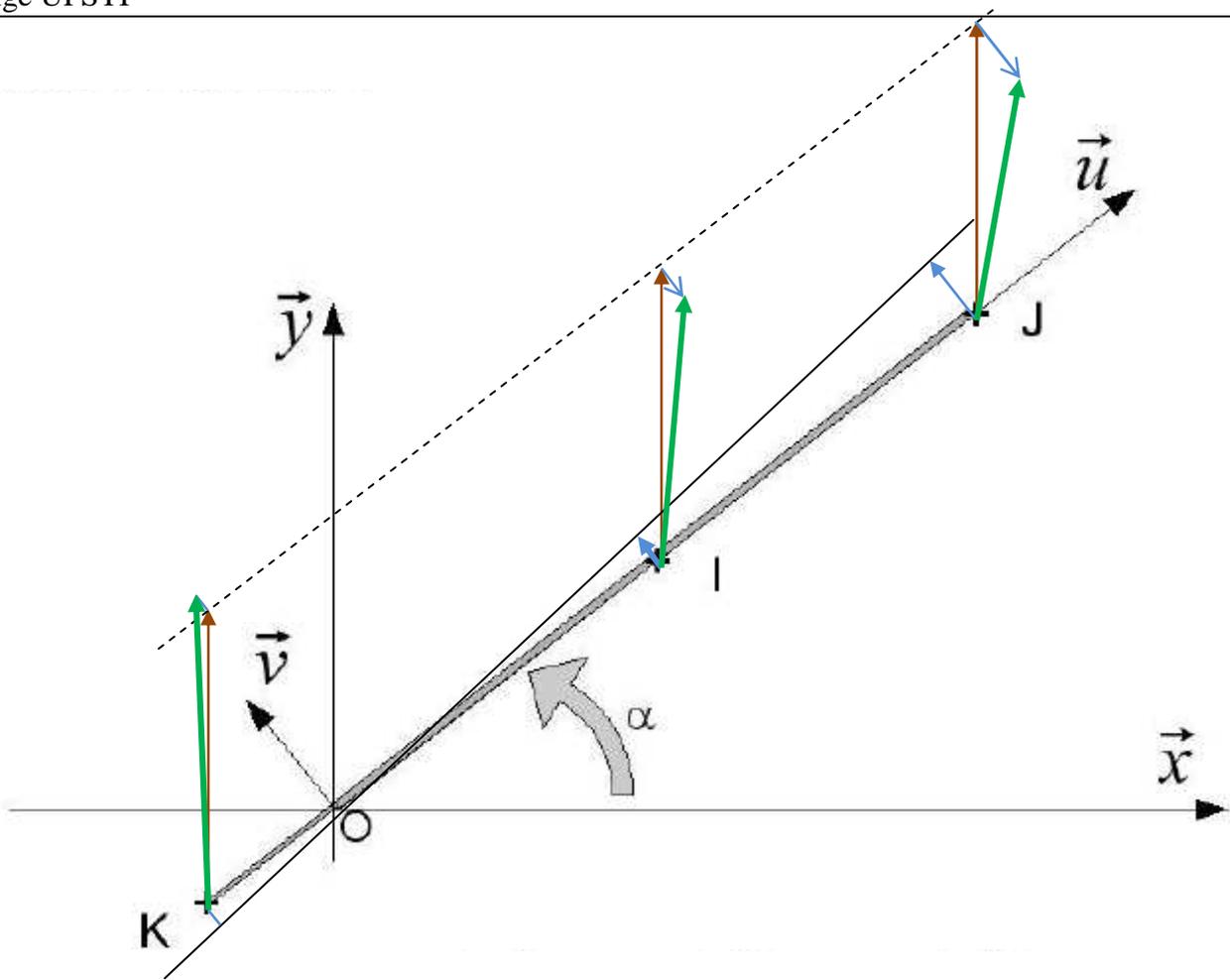
$$V_v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s} \Leftrightarrow 4 \text{ cm}$$

$$\|\vec{V}(J \in fleche/0)\| = 50\dot{\theta} = 5 \text{ m/s} \Leftrightarrow 1 \text{ cm}$$

En rouge la vitesse du vent en tout point de la flèche

En bleu la répartition de vitesse des point de la flèche dans leur mouvement par rapport au sol

En vert la vitesse du vent apparent en K, I et J



**QUESTION 20**

$$\vec{M}_O = \int_K^J \vec{OM} \wedge d\vec{T} = \frac{1}{2} C_t \rho V_v^2 \int_{-10}^{50} r \vec{u} \wedge \vec{y} dS = \frac{1}{2} C_t \rho V_v^2 \int_{-10}^{50} r [\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}] \wedge \vec{y} (1 \times dr \cos \theta)$$

$$\vec{M}_O = \frac{1}{2} C_t \rho V_v^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta \vec{z} \int_{-10}^{50} r dr$$

$$\vec{M}_O = \frac{1}{4} C_t \rho V_v^2 \cos^2 \theta \vec{z} [50^2 - 10^2] = 600 C_t \rho V_v^2 \cos^2 \theta \vec{z}$$

$$\vec{M}_O = 144 V_v^2 \cos^2 \theta \vec{z}$$

Avec  $V_v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ , on obtient  $\vec{M}_O = 57,6 \cdot 10^3 \cos^2 \theta \vec{z}$

**QUESTION 21**

Solide en rotation autour d'un axe fixe :

Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe fixe ( $O; \vec{z}$ )

$I_\Sigma \ddot{\theta} = \vec{M}_O \cdot \vec{z} - C_f - C_{fv} \dot{\theta}$ , soit :

$$4 \cdot 10^6 \ddot{\theta} + 6 \cdot 10^4 \dot{\theta} = -1000 + 144 V_v^2 \cos^2 \theta$$

Avec  $V_v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ , on obtient  $4000\ddot{\theta} + 60\dot{\theta} - 57,6 \cos^2 \theta + 1 = 0$

### QUESTION 22

La condition de non basculement s'écrit  $\|\vec{N}(sol_B \rightarrow grue)\| > 0$ , soit avec les notations de l'énoncé  $R_2 > 0$

Théorème du moment dynamique appliqué à l'ensemble de la grue suivant  $(A; \vec{y})$  :

Les solides constituant la grue sont en translation donc pour chacun d'eux le moment dynamique est nul en leur centre de gravité respectif.

De plus, les seules données d'inertie que l'on retienne sont celle des masses C, CP et 1CP, donc :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_A (grue/0) \cdot \vec{y} &= \vec{\delta}_A (C/0) \cdot \vec{y} + \vec{\delta}_A (CP/0) \cdot \vec{y} + \vec{\delta}_A (1CP/0) \cdot \vec{y} \\ &= \left[ \vec{AC} \wedge M_C \vec{a}(C/0) + \vec{AD} \wedge M_{CP} \vec{a}(D/0) + \vec{AE} \wedge M_{1CP} \vec{a}(E/0) \right] \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

Solide en translation, donc  $\vec{a}(C/0) = \vec{a}(D/0) = \vec{a}(E/0) = \ddot{\vec{x}}$

$$\text{Soit : } \vec{\delta}_A (grue/0) \cdot \vec{y} = \left[ M_C \vec{AC} + M_{CP} \vec{AD} + M_{1CP} \vec{AE} \right] \wedge \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_A (grue/0) \cdot \vec{y} &= \ddot{x} \left[ M_C \vec{AC} + M_{CP} \vec{AD} + M_{1CP} \vec{AE} \right] \cdot (\vec{x} \wedge \vec{y}) \\ &= \ddot{x} \left[ M_C \vec{AC} + M_{CP} \vec{AD} + M_{1CP} \vec{AE} \right] \cdot \vec{z} \\ &= \ddot{x} [60M_C + 70M_{CP} + 5M_{1CP}] \end{aligned}$$

Le théorème du moment dynamique choisi s'écrit :

$$\vec{\delta}_A (grue/0) \cdot \vec{y} = \underbrace{\vec{M}_A (\vec{g} \rightarrow C)}_{47M_C g} \cdot \vec{y} + \underbrace{\vec{M}_A (\vec{g} \rightarrow CP)}_{-13M_{CP} g} \cdot \vec{y} + \underbrace{\vec{M}_A (\vec{g} \rightarrow 1CP)}_{-3M_{1CP} g} \cdot \vec{y} + \underbrace{\vec{M}_A (sol_B \rightarrow grue)}_{6R_2} \cdot \vec{y} + \underbrace{\vec{M}_A (sol_A \rightarrow grue)}_0 \cdot \vec{y}$$

$$\text{Soit l'équation : } \ddot{x} [60M_C + 70M_{CP} + 5M_{1CP}] = 47M_C g - 13M_{CP} g - 3M_{1CP} g + 6R_2$$

$$\text{D'où, pour la limite du basculement } R_2 = 0 : \ddot{x} [60M_C + 70M_{CP} + 5M_{1CP}] = 47M_C g - 13M_{CP} g - 3M_{1CP} g, \text{ soit}$$

$$\text{une décélération limite de } \ddot{x} = \frac{47M_C g - 13M_{CP} g - 3M_{1CP} g}{60M_C + 70M_{CP} + 5M_{1CP}}$$

$$\text{A.N. : } \ddot{x} = -1,23 \text{ m.s}^{-2}$$

### QUESTION 23

$$\ddot{x} = -1,23 \text{ m.s}^{-2}$$

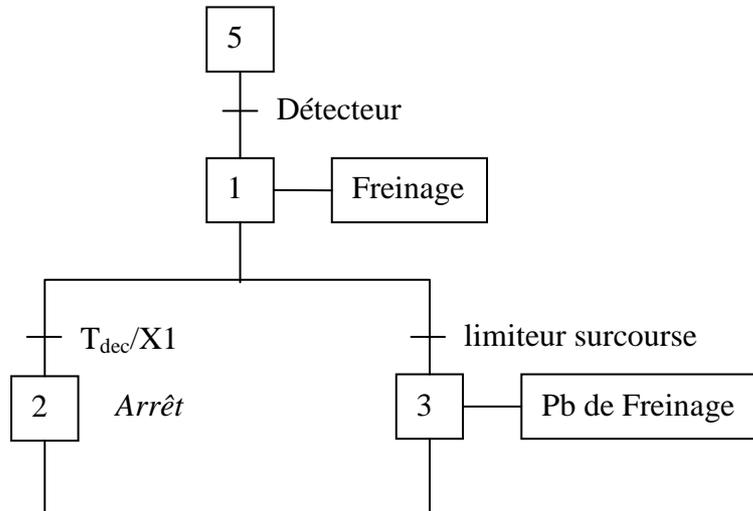
$$\text{Donc en intégrant et en tenant compte de la vitesse initiale : } \dot{x} = -1,23t + \frac{10}{60}$$

$$\text{Ce qui donne un temps d'arrêt de } T_{dec} \text{ tel que : } \dot{x}(T_{dec}) = 0 = -1,23T_{dec} + \frac{10}{60}, \text{ soit : } T_{dec} = \frac{1}{6 \times 1,23} = 0,135 \text{ s}$$

En intégrant une second fois et en prenant  $x(0) = 0$ , on a une position  $x(t) = -1,23\frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}t + 0$

Soit une distance parcourue de :  $D_{dec} = x(T_{dec}) = 0,011\text{m} = 11\text{cm}$

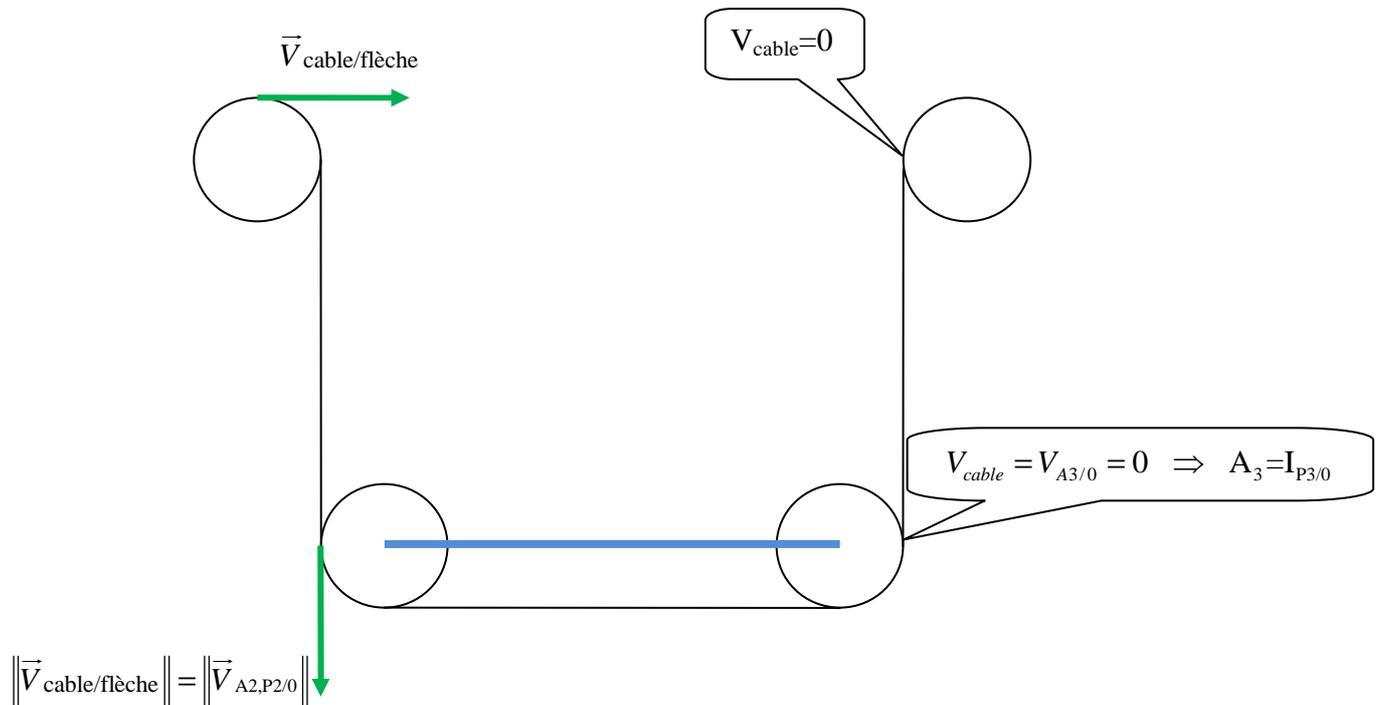
QUESTION 24



**Remarque :** Qu'est ce que c'est que ce détecteur si ce n'est « limiteur » !!!

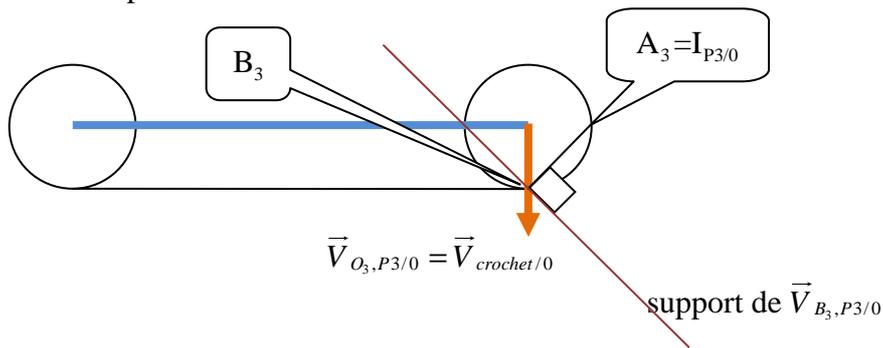
QUESTION 25

a) Pour un montage à 2 brins



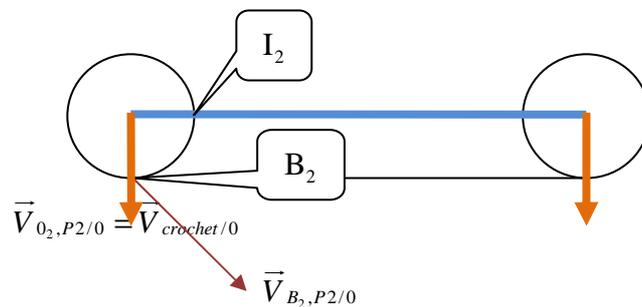
On s'intéresse à la cinématique des poulies P2, P3 et du brin de câble les reliant :

En étudiant d'abord la poulie P3 :

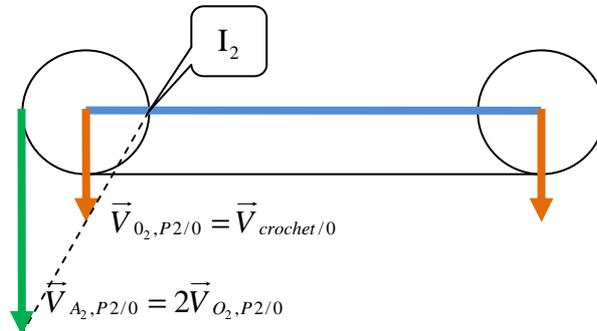


Comme  $A_3B_3 = rayon_{P3} \times \sqrt{2}$ ,  $\|\vec{V}_{B_3,P3/0}\| = \sqrt{2} \|\vec{V}_{O_3,P3/0}\| = \sqrt{2} \|\vec{V}_{crochet/0}\|$

On retrouve cette vitesse en B2, puisque le brin entre les 2 poulies est en translation, en s'intéressant à la poulie 2, on a donc :



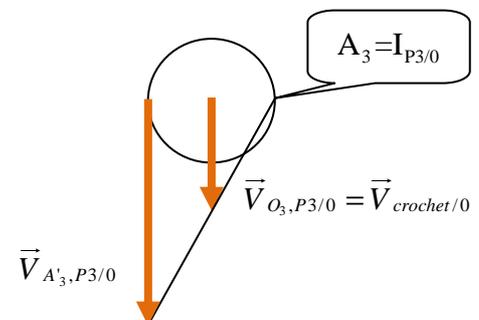
Le CIR de P2 est donc en  $I_2$ , comme représenté ci-dessus et l'on a donc par construction ci-dessous :



D'où  $\|\vec{V}_{crochet/chariot}\| = \frac{1}{2} \|\vec{V}_{cable/flèche}\|$  ce qui équivaut dans le contexte à  $\|\vec{V}_{crochet/0}\| = \frac{1}{2} \|\vec{V}_{cable/0}\|$

b)

- Pour la poulie P3 :  $A_3$  étant le CIR de P3, on en déduit par le champ des vitesses  $\vec{V}_{A_3,P3/0} = 2\vec{V}_{crochet/0}$



- Pour la poulie P5 :  $O_5$  étant le CIR de P5, on en déduit par le triangle des vitesses

$$\vec{V}_{A_4, P5/0} = -\vec{V}_{A'4, P5/0} = -\vec{V}_{A'3, P5/0} = -2\vec{V}_{crochet/0}$$

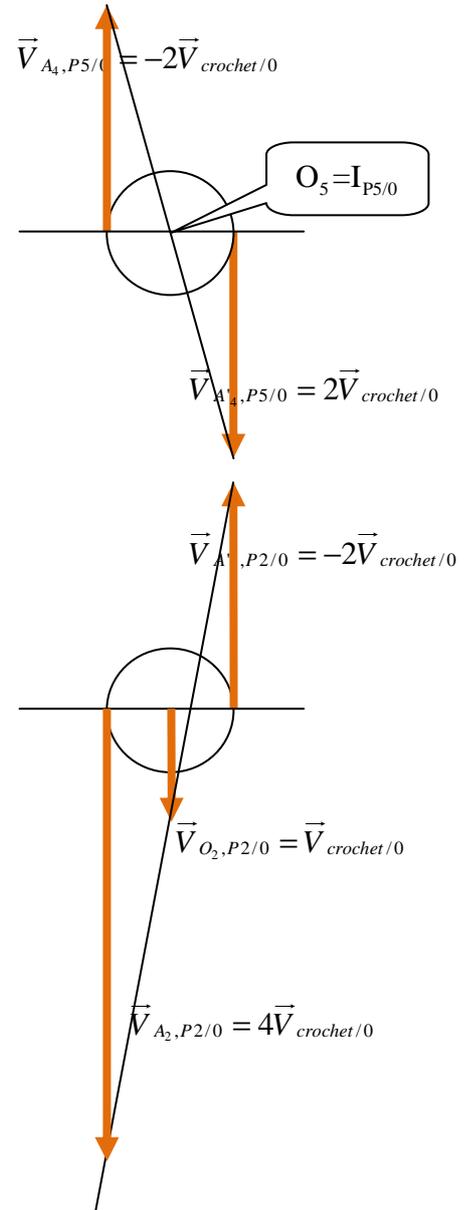
- Pour la poulie P2 :  $\vec{V}_{O_2, P2/0} = \vec{V}_{crochet/0}$  et

$\vec{V}_{A'2, P2/0} = \vec{V}_{A_4, P5/0} = -2\vec{V}_{crochet/0}$ , on en déduit par le triangle des vitesses que :

$$\vec{V}_{A_2, P2/0} = 4\vec{V}_{crochet/0}$$

$$\text{Or } \|\vec{V}_{A_2, P2/0}\| = \|\vec{V}_{cable/fleche}\| = \|\vec{V}_{cable/0}\| = 4\|\vec{V}_{crochet/0}\|$$

On a donc  $\|\vec{V}_{crochet/0}\| = \frac{1}{4}\|\vec{V}_{cable/0}\|$

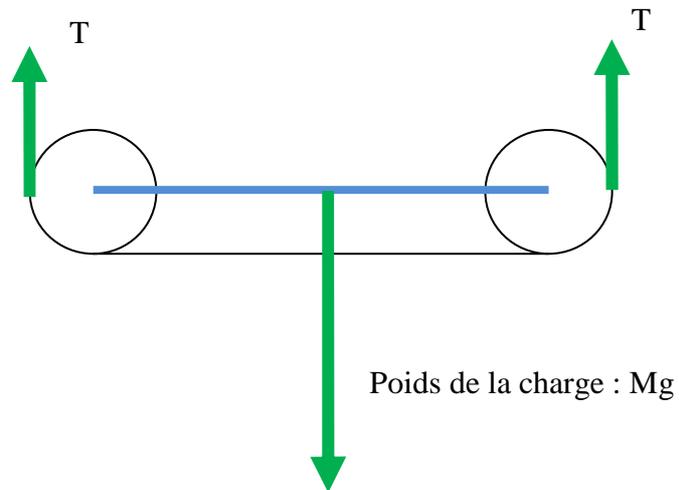


### QUESTION 26

La tension dans tous les brins du câble est identique sinon celui-ci se déformerait (hors étude). On la notera  $T$ . En considérant les brins comme des solides indéformables, ceux – ci exercent sur les poulies des efforts dont la norme vaut la tension  $T$

La charge montant à vitesse constante, donc sans accélération, le théorème de la résultante dynamique a la même expression analytique que le théorème de la résultante statique.

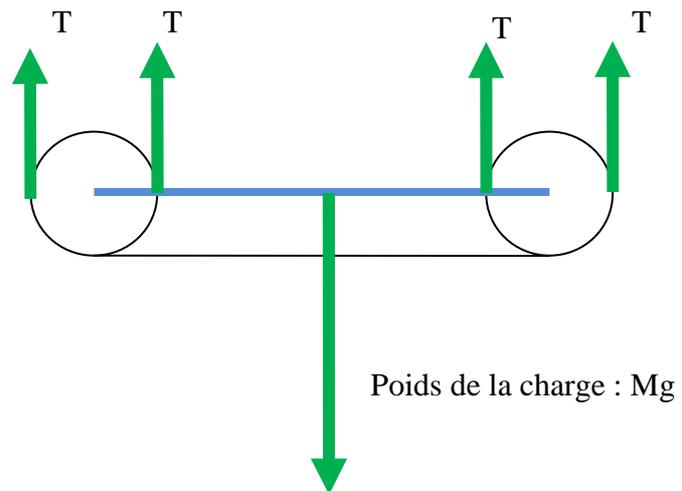
a)  
Isolons l'ensemble P2 + P3 + Crochet :



De façon évidente, on en déduit que la tension dans les câbles correspond à la moitié du poids de la charge soulevé.

$$T = \frac{Mg}{2}$$

b)  
Isolons l'ensemble P2 + P3 + Crochet :



De façon évidente, on en déduit que la tension dans les câbles correspond au quart du poids de la charge soulevé.

$$T = \frac{Mg}{4}$$

### QUESTION 27

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble du mécanisme de levage

$$E_C (\text{mot+red+tambour}/0) = \frac{1}{2} J_m \omega_{\text{moteur}}^2 ; E_C (\text{cables}/0) = 0 \text{ masses négligées ;}$$

$$E_C (\text{mouffles}/0) = 0 \text{ masse non données donc sans doute négligée ! ; } E_C (\text{charge}/0) = \frac{1}{2} M_{ch} V_{ch}^2$$

$$\text{Donc } E_C (\text{mécanisme de levage}/0) = \frac{1}{2} J_m \omega_{\text{moteur}}^2 + \frac{1}{2} M_{ch} V_{ch}^2$$

$$\text{Or } V_{ch} = \frac{1}{2} V_{\text{cable}/0} = \frac{1}{2} \frac{D_{tt}}{2} \omega_{\text{tambour}} = \frac{1}{2} \frac{D_{tt}}{2} \frac{1}{40} \omega_m = \frac{D_{tt}}{160} \omega_m .$$

$$\text{D'où : } E_C (\text{mécanisme de levage}/0) = \frac{1}{2} \left( J_m + M_{ch} \frac{D_{tt}^2}{160^2} \right) \omega_{\text{moteur}}^2$$

$$P_{ext} = \underbrace{P(\text{moteur} \rightarrow \text{arbre}/0)}_{C_m \omega_m} + \underbrace{P(\vec{g} \rightarrow \text{mécanisme de levage}/0)}_{-M_{ch} g V_{ch}}$$

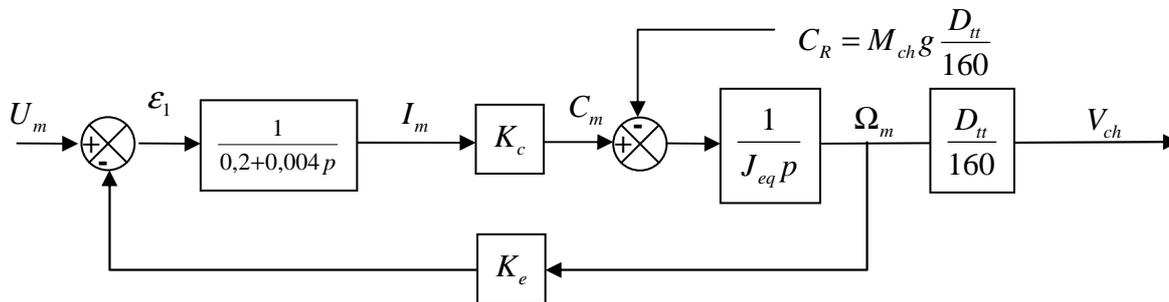
$$P_{int} = 0$$

$$\text{D'où : } \left( J_m + M_{ch} \frac{D_{tt}^2}{160^2} \right) \omega_{moteur} \dot{\omega}_{moteur} = C_m \omega_m - M_{ch} g V_{ch} = \left( C_m - M_{ch} g \frac{D_{tt}}{160} \right) \omega_m$$

$$\text{Soit : } \left( J_m + M_{ch} \frac{D_{tt}^2}{160^2} \right) \dot{\omega}_{moteur} = C_m - M_{ch} g \frac{D_{tt}}{160}$$

### QUESTION 28

Ce qui permet de compléter le schéma bloc du document réponse par :



$$\text{avec } J_{eq} = J_m + M_{ch} \frac{D_{tt}^2}{160^2} = 0,54 \text{ Kg.m}^2$$

### QUESTION 29

Directement par équation :

$$C_m = \frac{K_c}{0,2+0,004p} \left[ U_m - \frac{K_e}{J_{eq}p} (C_m - C_R) \right]$$

$$C_m \left( 1 + \frac{K_e K_c}{J_{eq}p(0,2+0,004p)} \right) = \frac{K_c U_m}{0,2+0,004p} + \frac{K_e K_c}{J_{eq}p(0,2+0,004p)} C_R, \text{ Soit :}$$

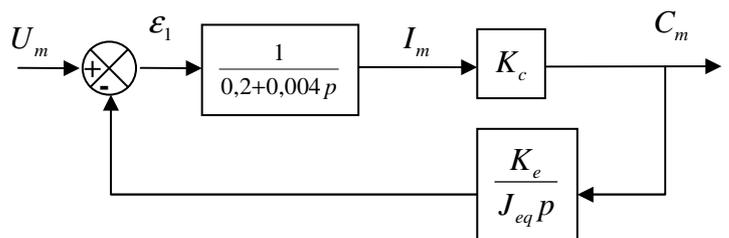
$$C_m = \frac{K_c J_{eq} p}{K_e K_c + J_{eq} p(0,2+0,004p)} U_m + \frac{K_e K_c}{K_e K_c + J_{eq} p(0,2+0,004p)} C_R$$

Par superposition en simplifiant le schéma bloc :

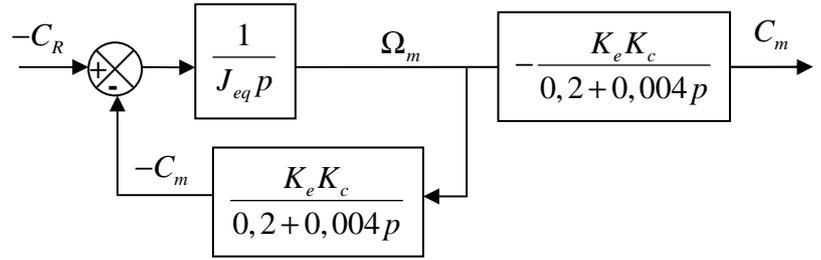
$C_R = 0$  donne :

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{C_m}{U_m} &= \frac{\frac{K_c}{0,2+0,004p}}{1 + \frac{K_e K_c}{J_{eq}p(0,2+0,004p)}} \\ &= \frac{K_c J_{eq} p}{K_e K_c + J_{eq} p(0,2+0,004p)} \end{aligned}$$



, ce qui est bien le résultat partiel trouvé précédemment.



$U_m = 0$  donne :

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{C_m}{-C_R} &= -\frac{K_e K_c}{(0,2+0,004p)} \frac{1}{1 + \frac{J_{eq} p}{K_e K_c}} \\ &= -\frac{K_e K_c}{K_e K_c + J_{eq} p (0,2+0,004p)} \end{aligned}$$

, ce qui est bien le résultat partiel trouvé précédemment.

### QUESTION 30

$$C_m = \frac{K_c J_{eq} p}{K_e K_c + J_{eq} p (0,2+0,004p)} U_m \quad \text{avec} \quad U_m = \frac{200}{p}, \text{ d'où}$$

$$C_m = \frac{200 K_c J_{eq}}{K_e K_c + J_{eq} p (0,2+0,004p)}, \text{ ce qui donne en application numérique :}$$

$$C_m = \frac{180}{1+0,3p+0,006p^2} = \frac{30000}{p^2+50p+166,6} = \frac{30000}{(p+3,6)(p+46,4)}, \text{ ce qui se décompose en éléments}$$

simples sous la forme :

$$C_m = \frac{a}{p+3,6} + \frac{b}{p+46,4} \text{ avec :}$$

- $a = \left[ \frac{30000}{p+46,4} \right]_{p=-3,6} = 700$

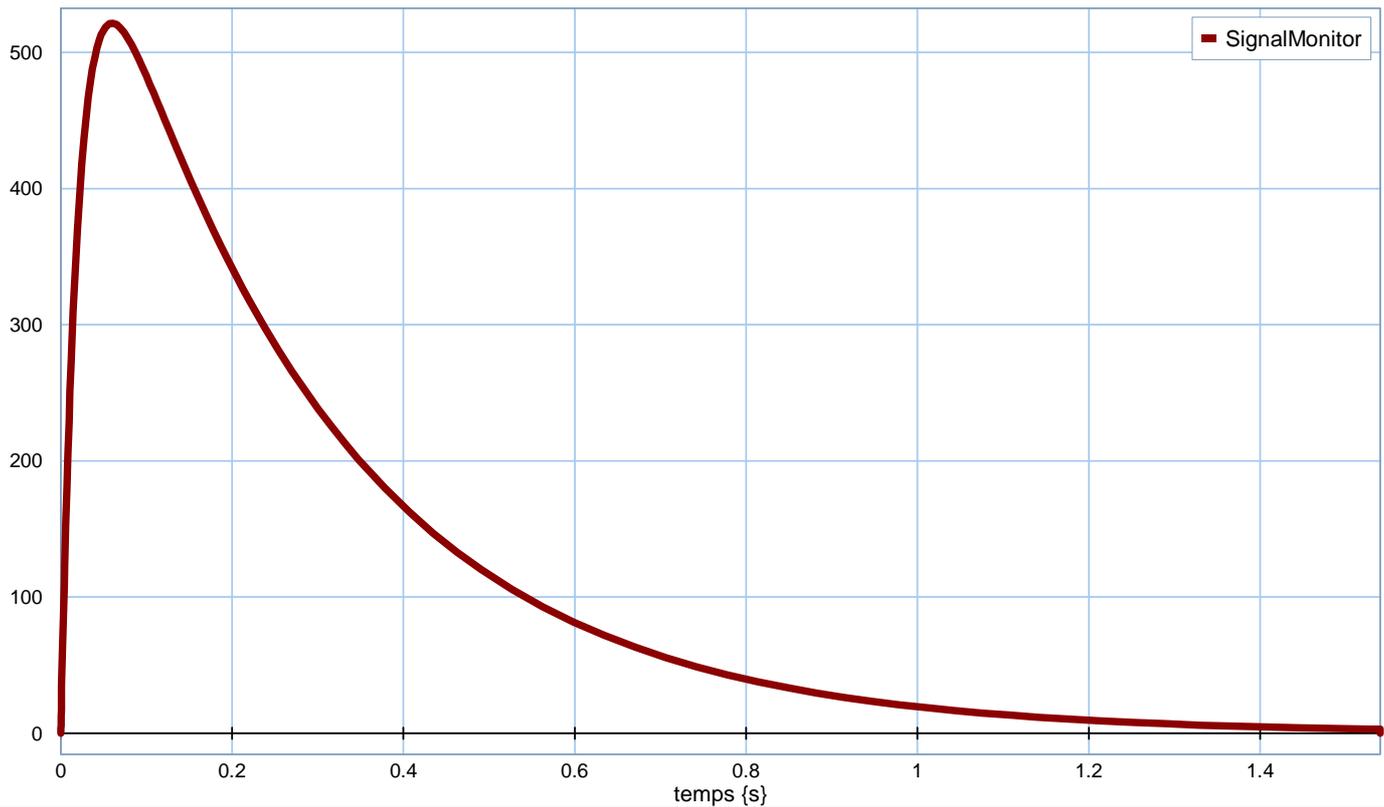
- $b = \left[ \frac{30000}{p+3,6} \right]_{p=-46,4} = -700$

$$\text{Soit } C_m = 700 \left( \frac{1}{p+3,6} - \frac{1}{p+46,4} \right), \text{ d'où :}$$

$$C_m(t) = 700 (e^{-3,6t} - e^{-46,4t})$$

Les valeurs initiale et à l'infini sont donc nulles.

Cependant une simulation informatique (voir ci-dessous) permet de constater un maximum de l'ordre de 520Nm pour le couple moteur dans de telles conditions.



**QUESTION 31**

Pour la rampe  $U_m = \frac{40}{p^2}$ , on a  $C_m \left( U_m = \frac{40}{p^2} \right) = \frac{1}{5p} C_m \left( U_m = \frac{200}{p} \right) = \frac{6000}{p(p^2 + 50p + 166,6)} = \frac{6000}{p(p + 3,6)(p + 46,4)}$ ,

ce qui se décompose en éléments simple sous la forme :

$$C_m = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + 3,6} + \frac{c}{p + 46,4} \text{ avec :}$$

- $a = \left[ \frac{6000}{(p + 3,6)(p + 46,4)} \right]_{p=0} = 36$
- $b = \left[ \frac{6000}{p(p + 46,4)} \right]_{p=-3,6} = -39$
- $c = \left[ \frac{6000}{p(p + 3,6)} \right]_{p=-46,4} = 3$

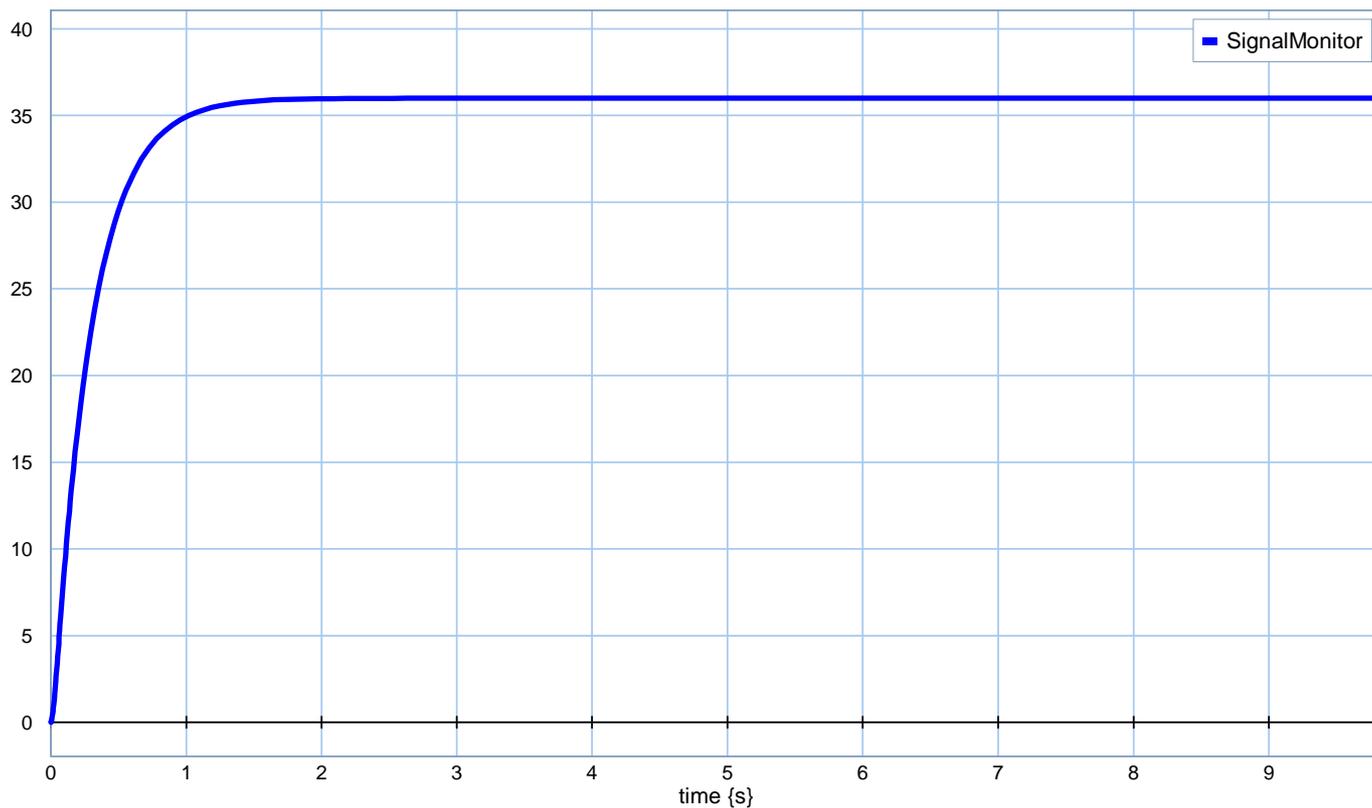
Soit  $C_m = \frac{36}{p} - \frac{39}{p + 3,6} + \frac{3}{p + 46,4}$ , d'où :

$$C_m = 36 - 39e^{-3,6t} + 3e^{-46,4t}$$

Ce qui donne les valeurs remarquables suivantes :

$$C_m(0) = 0 \text{ Nm et } C_m(\infty) = 36 \text{ Nm}$$

Ce qui donne la réponse à un échelon d'un second ordre fortement amorti :



### QUESTION 32

Pour diminuer le couple moteur on peut :

- Au niveau du système mécanique augmenter le rapport de réduction
- Au niveau commande, et d'après la comparaison des réponses obtenues aux 2 questions précédentes, il faut prévoir une commande en rampe de tension pour atteindre la consigne constante (ici 5s en rampe pour 200V).