

Commande d'embrayage

Corrigé

Q.1 On cherche la pulsation de coupure à 0dB ω_c respectant le cahier des charges et on nous donne $\omega_c t_e = 3$.

Donc $\omega_c t_{e2} = 3$ soit $\omega_c = 1000 \text{ rad/s}$

Q.2 On cherche $T_{i\min}$ compatible avec le cahier des charges. Nous venons d'utiliser t_{e2} donc utilisons la marge de phase $\Delta\Phi_1 \geq 60^\circ$.

$$\Delta\Phi_1 = 180 + \text{Arg}[FTBO(j\omega_c)] \geq 60^\circ$$

La FTBO de la boucle de vitesse est $\frac{R_2(p)G_0H_1(p)G_v}{Nr}$ donc

$$\text{Arg}[R_2(j\omega_c)] + \text{Arg}[H_1(j\omega_c)] \geq -120^\circ$$

$$-90^\circ + \arctan[T_i\omega_c] - \arctan[\tau_m\omega_c] - \arctan[\tau_e\omega_c] \geq -120^\circ$$

$$T_{i\min} = \frac{\tan(-30^\circ + \arctan[\tau_m\omega_c] + \arctan[\tau_e\omega_c])}{\omega_c} \quad \text{An : } T_{i\min} = 6,21 \text{ ms}$$

Pour cette valeur de $T_{i\min} = 6,21 \text{ s}$, nous devons nous assurer que $\omega_c = 1000 \text{ rad/s}$ est réellement la pulsation de coupure à 0dB soit

$$\left| \frac{R_2(p)G_0H_1(p)G_v}{Nr} \right| = 1$$

$$\frac{G_0G_vK_vK_2\sqrt{1+(T_i\omega_c)^2}}{T_i\omega_c N_r \sqrt{1+(\tau_m\omega_c)^2} \sqrt{1+(\tau_e\omega_c)^2}} = 1$$

$$K_2 = \frac{T_i\omega_c N_r \sqrt{1+(\tau_m\omega_c)^2} \sqrt{1+(\tau_e\omega_c)^2}}{G_0G_vK_v \sqrt{1+(T_i\omega_c)^2}} \quad \text{An : } K_2 = 2,16$$

Les diagrammes de Bode, module et phase, de la fonction de transfert de la boucle de vitesse fermée et corrigée $F_v(p) = V_b(p)/V_c(p)$ retenus pour la suite de l'étude sont donnés sur la figure 18.

Q.3 Quand $\omega \rightarrow 0$, la courbe de phase tend vers 0° et la courbe de gain vers une constante donc le système est de classe 0.

Quand $\omega \rightarrow \infty$, la courbe de phase tend vers 0° et la courbe de gain vers une asymptote à donc le système est d'ordre 2 non résonnant.

$$F_v(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Le gain statique est de -20dB donc $K = 0,1$

La pulsation propre est obtenue soit à l'intersection des asymptotes soit pour une phase de -90° . on trouve $\omega_0 \approx 1300 \text{ rad/s}$.

Le système étant non résonnant, il est difficile d'estimer la valeur du coefficient d'amortissement. Cependant, on remarque le système est non résonnant mais on ne voit pas apparaître les 2 pôles (pas de pente à -20dB/dec au milieu) donc le coefficient d'amortissement est « petit » < 1 . $1 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Réglage de la boucle de position

Q.4 La FTBO de la boucle de position est

$$R_1(p) F_v(p) \frac{1000}{p} G_x = K_1 \frac{2000}{p} F_v(p)$$

Attention, nous avons à notre disposition les courbes de $F_v(p)$.

L'intégrateur « descend » la courbe de phase de 90° . Nous avons ainsi une marge de phase de 60° pour $\omega_1 \approx 500 \text{ rad/s}$. A cette pulsation, on cherche K_1 pour que le module soit égal à 1 soit :

$$K_1 \frac{2000}{\omega_1} \|F_v(p)\| = 1 \text{ donc } K_1 = \frac{\omega_1}{2000 \|F_v(j\omega_1)\|}$$

Par lecture graphique $\|F_v(j\omega_1)\|_{dB} \approx -20 \text{ dB}$ soit $\|F_v(j\omega_1)\| \approx 0,1$

Donc $K_1 = 2,5$

Q.5 D'après la question précédente, la pulsation de coupure à 0dB est $\omega_1 \approx 500 \text{ rad/s}$. D'après la règle admise dans l'énoncé, le temps d'établissement est donné par $\omega_1 t_e = 3$. Donc

$$t_e = \frac{3}{\omega_1} \quad \text{AN } t_e = 6 \text{ ms}$$

Le temps de réponse du cahier des charges est respecté.

Amélioration de la loi de commande

Q.6 On veut la loi de déplacement $x_b(t)$, autrement dit on veut $X(p) = TL[x_b(t)]$. D'autre part nous avons $X_c(p) = TL[x_c(t)]$ et d'après le schéma bloc $\varepsilon(p) = X_c(p) - X_m(p) = X_c(p) - G_x X(p)$.

On cherche à avoir $\varepsilon(t) = 0$ donc il faut imposer $x_c(t) = G_x x_b(t)$

Q.7 L'écart en régime permanent est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_c(t) - x_m(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{X_c(p)}{1 + FTBO(p)}$$

La transformée de Laplace de $x_c(t) = \gamma_{c\max} t^2 \gamma(t)$ est $X_c(p) = \frac{2\gamma_{c\max}}{p^3}$

Et $FTBO(p) = K_1 G_x \frac{1000}{p} F_v(p)$ donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_c(t) - x_m(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + K_1 G_x \frac{1000}{p} F_v(p)} \cdot \frac{2\gamma_{c\max}}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2\gamma_{c\max}}{p(p + K_1 G_x 1000 F_v(p))}$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_c(t) - x_m(t)] = \infty$$

Remarque : Ce résultat est évident puisque le système est de classe 1.

- Q.8 On fait de la correction par anticipation. complète alors la loi de commande de la boucle externe suivant l'expression : On pose donc

$$V_c(p) = K_1 \varepsilon(p) + \lambda p X_c(p)$$

De plus nous avons

$$\varepsilon(p) = X_c(p) - G_x \frac{1000}{p} F_v(p) V_c(p)$$

Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= X_c(p) - G_x \frac{1000}{p} F_v(p) [K_1 \varepsilon(p) + \lambda p X_c(p)] \\ \left[1 + K_1 G_x \frac{1000}{p} F_v(p) \right] \varepsilon(p) &= [1 - 1000 \lambda G_x F_v(p)] X_c(p) \end{aligned}$$

Donc l'écart en régime permanent est

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow \infty} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{[1 - 1000 \lambda G_x F_v(p)]}{\left[1 + K_1 G_x \frac{1000}{p} F_v(p) \right]} \frac{2\gamma_{c\max}}{p^3}$$

De plus $F_v(0) = 0,1$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2\gamma_{c\max} [1 - 200\lambda]}{p [p + 200K_1]}$$

Si on veut une valeur finie, on doit prendre $\lambda = \frac{1}{200}$

Je ne comprends pas la suite de la question.

Étude du comportement vis-à-vis des perturbations de couple résistant

- Q.9 Pour chacun des trois comparateurs, nous pouvons écrire

$$\varepsilon_1(p) = X_c(p) - G_x X(p) \quad (1)$$

$$\varepsilon_2(p) = R_1(p) \varepsilon_1(p) - \frac{G_v}{N_r} H_1(p) \varepsilon_3(p) \quad (2)$$

$$\varepsilon_3(p) = G_0 R_2(p) \varepsilon_2(p) - H_2(p) C_r(p) \quad (3)$$

Et enfin

$$X(p) = \frac{1000 H_1(p)}{N_r p} \varepsilon_3(p) \quad (4)$$

Les équations (2) et (3) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(p) &= G_0 R_2(p) \left[\varepsilon_2(p) = R_1(p) \varepsilon_1(p) - \frac{G_v}{N_r} H_1(p) \varepsilon_3(p) \right] - H_2(p) C_r(p) \\ \left[1 + G_0 R_2(p) \frac{G_v}{N_r} H_1(p) \right] \varepsilon_3(p) &= G_0 R_2(p) R_1(p) \varepsilon_1(p) - H_2(p) C_r(p) \end{aligned}$$

Donc avec (4)

$$X(p) = \frac{1000H_1(p)}{N_r p \left[1 + G_0 R_2(p) \frac{G_v}{N_r} H_1(p) \right]} \left[G_0 R_2(p) R_1(p) \varepsilon_1(p) - H_2(p) C_r(p) \right]$$

Soit avec l'équation (1)

$$X(p) = \frac{1000H_1(p)}{N_r p \left[1 + G_0 R_2(p) \frac{G_v}{N_r} H_1(p) \right]} \left[G_0 R_2(p) R_1(p) \{ X_c(p) - G_x X(p) \} - H_2(p) C_r(p) \right]$$

$$X(p) = \frac{1000H_1(p)}{N_r p \left[1 + G_0 R_2(p) \frac{G_v}{N_r} H_1(p) \right]} \left[G_0 R_2(p) R_1(p) G_x \left\{ \frac{1}{G_x} X_c(p) - X(p) \right\} - H_2(p) C_r(p) \right]$$

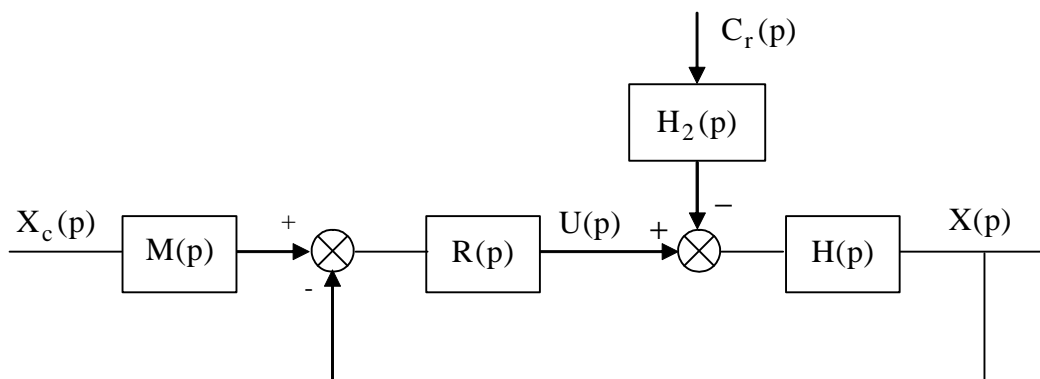
On pose

$$H(p) = \frac{1000H_1(p)}{N_r p \left[1 + G_0 R_2(p) \frac{G_v}{N_r} H_1(p) \right]} ; R(p) = G_0 R_2(p) R_1(p) G_x \text{ et } M(p) = \frac{1}{G_x}$$

Afin d'obtenir

$$X(p) = \{ R(p) [M(p) X_c(p) - X(p)] - H_2(p) C_r(p) \} H(p)$$

Le schéma bloc est alors



Pour la suite, on prendra :

$$H(p) = \frac{50}{p(1+10^{-2}p)(1+5 \cdot 10^{-4}p)} \text{ et } H_2(p) = 40(1+5 \cdot 10^{-4}p)$$

$$R(p) = \frac{8000 \left(1 + \frac{p}{400} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right)}{p}$$

Q.10 Vis-à-vis des perturbations, nous avons

$$\sigma(p) = \frac{X(p)}{C_r(p)} = \frac{H_2(p)H(p)}{1+R(p)H(p)}$$

Nous avons

$$R(p)H(p) = \frac{4 \cdot 10^{-5} \left(1 + \frac{p}{400} \right)}{p^2 \left(1 + \frac{p}{2000} \right)} ; H_2(p)H(p) = \frac{2000}{p(1+10^{-2}p)} \text{ et } \frac{H_2(p)}{R(p)} = \frac{p(1+5 \cdot 10^{-4}p)}{200 \left(1 + \frac{p}{400} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right)}$$

Donc en première approximation, on peut considérer que :

- si p est « petit » $\|R(p)H(p)\| \gg 1$ et donc $\|\sigma(p)\| \approx \left\| \frac{H_2(p)}{R(p)} \right\|$ de plus $\|H_2(p)H(p)\| \rightarrow \infty$ et

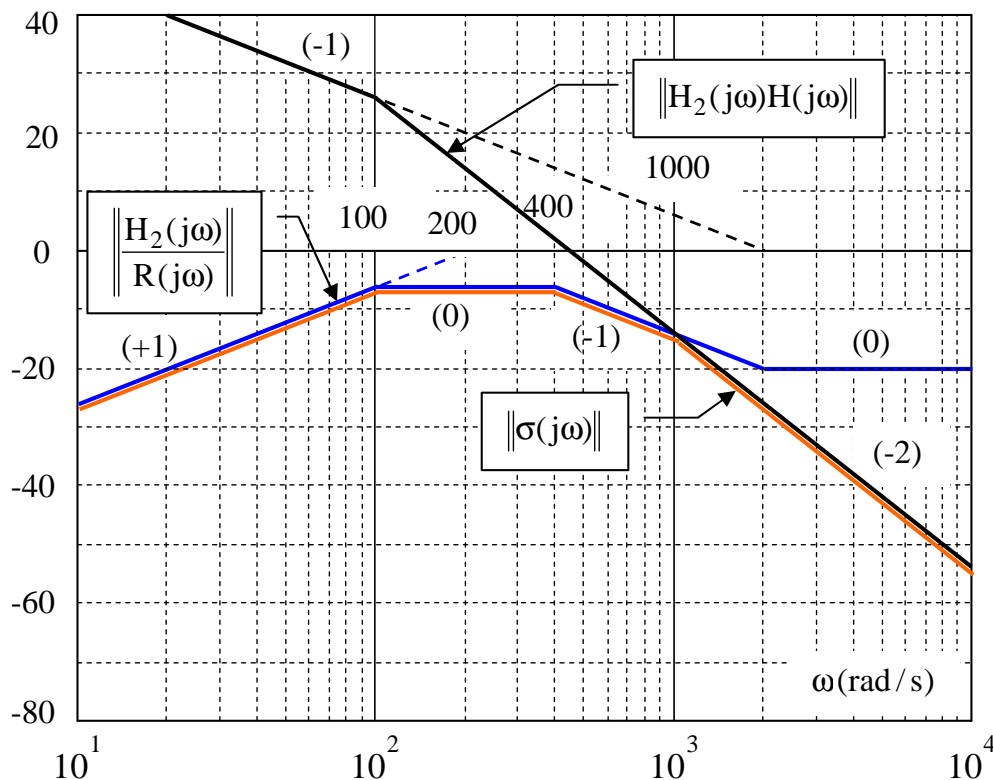
$$\left\| \frac{H_2(p)}{R(p)} \right\| \rightarrow 0.$$

- Si p est « grand » $\|R(p)H(p)\| \ll 1$ et donc $\|\sigma(p)\| \approx \|H_2(p)H(p)\|$ de plus $\|H_2(p)H(p)\| \rightarrow 0$ et $\left\| \frac{H_2(p)}{R(p)} \right\| \rightarrow \infty$.

On peut donc grossièrement approché $\|\sigma(j\omega)\|$ par

$$\|\sigma(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)H(j\omega)\|; \left\| \frac{H_2(j\omega)}{R(j\omega)} \right\| \right]$$

Q.11 Diagramme asymptotique dans le plan de Bode



D'après le diagramme précédent, on voit que :

- Les pôles (racines du dénominateur, ie à chaque fois que l'on perd de la pente) sont : 100, 400 et 1000.
- Le système de possède pas de zéro (racines du numérateur, ie à chaque fois que l'on gagne de la pente) mais possède un dérivateur pur.

De plus, pour $p \rightarrow 0$ l'asymptote de $\sigma(p)$ est confondue avec celle de $\frac{H_2(p)}{R(p)}$ donc

$$\sigma(p) = \frac{p}{200 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{400}\right) \left(1 + \frac{p}{1000}\right)}$$

Q.12 La réponse à un échelon de perturbation $C_r(t) = C_{r0} \cdot \gamma(t)$ est la transformée de Laplace inverse de

$$X(p) = \sigma(p)C_r(p) = \frac{C_{r0}}{200 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{400}\right) \left(1 + \frac{p}{1000}\right)}$$

On décompose en éléments simples :

$$X(p) = C_{r0} \cdot \left\{ \frac{A}{2(100+p)} + \frac{B}{0,5(400+p)} + \frac{C}{0,2(1000+p)} \right\}$$

On multiplie par $(100+p)$ et on prend $p = -100$. Il vient $A = \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{20}{27} = 0,74$.

De même on trouve

$$B = \frac{2}{(1-4) \left(1 - \frac{4}{10}\right)} = -\frac{20}{21} = -0,95 \text{ et } C = \frac{1}{(1-10) \left(1 - \frac{10}{4}\right)} = \frac{20}{54} = 0,37$$

Donc

$$x(t) = C_{r0} \left(0,74e^{-100t} - 0,95e^{-400t} + 0,37e^{-1000t} \right)$$

Q.13 Allure de l'évolution temporelle de la position de la butée.

En première approximation, $x(t)$ peut être approché par $x(t) = 0,74C_{r0}e^{-100t}$ on obtient la courbe pointillée.

Le temps de réponse à 5% est alors proche de 3 fois le temps caractéristique soit

$$t = \frac{3}{100} = 30 \text{ ms}$$

