Concours e3a

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Épreuve de MATHÉMATIQUES 1
Filière MP
durée 3 heures

Nota : *Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

Dans cette épreuve **comme dans toutes celles qui suivront**, *il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

---

1) a) Calculer le volume et la somme des aires des faces d'un tétraèdre régulier dont les côtés ont a pour longueur.
   b) Résoudre les mêmes questions pour un octaèdre régulier (dont les sommets sont les centres des faces d'un cube).

---

2) a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle U d'ordre n dont les éléments $u_{i,j}$ sont nuls sauf pour les n éléments $u_{n-k,k+1} = 1$ pour $0 \leq k < n$ (on pourra distinguer selon que $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$). Est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice canonique est U ?
   b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} U & I \\ I & U \end{pmatrix}$ d'ordre $2n$. Est-elle diagonalisable ?

---

3) Donner une représentation paramétrique et tracer l'ensemble des projections orthogonales de l'origine sur les tangentes à l'ellipse d'équation cartésienne

$$9(x-7)^2 + 49y^2 = 441.$$

---

4) a) Déterminer toutes les droites d'un espace affine réel de dimension 3 incluses dans la surface d'équation $xy + yz + zx = 0$ (utiliser la caractérisation barycentrique d'une droite).
   b) Même problème pour les surfaces d'équations $xy + yz + zx = -1$ et $xy + yz + zx = 1$.

---

5) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Déterminer les polynômes A et B de $\mathbb{C}[X]$ tels que $A^n + B^n$ soit une constante complexe non nulle.
   b) En déduire les polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n = PQ$ (on pourra poser $P = DA$ et $Q = DB$, où D est le plus grand commun diviseur de P et Q).

---

6) a) Simplifier (lorsqu'elle a un sens) l'expression $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$.
   b) Calculer $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} c_k$ où $c_n = \cos \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ (relation de Viète). En déduire la valeur de l'expression

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}.$$

   c) Simplifier (lorsqu'elle a un sens) l'expression $\dfrac{1}{\tan \alpha} - \dfrac{2}{\tan 2\alpha}$.
   d) En déduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k$ en fonction de n et de $t_n = \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ (relation de Descartes) en calculant successivement $\tan \dfrac{\pi}{8}$ et S_0 puis en mettant, grâce à un choix convenable de α, la différence $t_n = S_n - S_{n-1}$ sous la forme $f(n) - f(n-1)$.
   e) Que peut-on en déduire quant aux limites éventuelles de S_n et P_n ?