Concours e3a

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Épreuve de MATHÉMATIQUES 2

Flière MP

durée 3 heures

Nota : les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer $\boxed{\textit{très distinctement}}$ *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile.*

Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir $\boxed{\textit{encadrer}}$ *chacun des résultats correspondants aux éléments* $\boxed{\textit{encadrés}}$ *dans les énoncés.*

$\boxed{\text{SUJET 1}}$

Soit $f(x) = x^x$, x réel > 0. On peut noter $f^{(n)}(x)$, ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, ou $D^n f$ pour la dérivée n-ième de f.

$\boxed{1}$ Dresser un tableau de variations de f, et dessiner sa courbe représentative.

$\boxed{2}$ On pose $c_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer c_1 et c_2.

$\boxed{3}$ Établir que $y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle $y' = y\ln x + y$.

En déduire la relation $c_{n-1} = \dfrac{1}{n+1}\left(c_n + \dfrac{c_{n-1}}{1} - \dfrac{c_{n-2}}{2} + \dfrac{c_{n-3}}{3} - \dfrac{c_{n-4}}{4} + \dots\right)$.

$\boxed{4}$ Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$?

$\boxed{5}$ Prouver que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle J ouvert que l'on précisera.

$\boxed{\text{SUJET 2}}$

Soient $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^n dt$, $L_n(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt$ où n est entier ≥ 1 et s réel > 0.

$\boxed{1}$ Calculer $\boxed{L_n(s)}$. Comparer alors a_n et I_n.

$\boxed{2}$ Déterminer $\boxed{\lambda} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

$\boxed{3}$ En déduire le rayon de convergence $\boxed{R}$ de $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$.

Cette série entière converge-t-elle en R ? Et en $-R$?

$\boxed{4}$ Établir la relation $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

$\boxed{5}$ Dresser un tableau de variations de $f(x)$ en précisant si les limites aux bornes sont finies ou non.

$\boxed{\text{SUJET 3}}$

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

$\boxed{1}$ Préciser l'ensemble de définition $\boxed{\mathcal{E}}$ de f.

$\boxed{2}$ Montrer que cette fonction est ***strictement*** décroissante .

$\boxed{3}$ Déterminer la limite de f pour x tendant vers $+\infty$.

$\boxed{4}$ Prouver que $f(x) \sim \dfrac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0. [On peut comparer f à une intégrale.]

$\boxed{5}$ Soit $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Démontrer que J ***existe*** et que $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

SUJET 4

On définit f, fonction ***paire*** de période 2π, par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0, \pi]$.

$\boxed{1}$ Cette fonction est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{2}$ On cherche la série de Fourier de f , soit $a_0 + \displaystyle\sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Calculer $\boxed{a_0}$ et $\boxed{b_0}$.

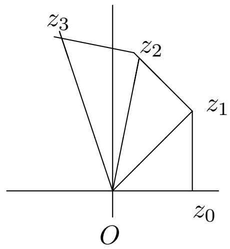
$\boxed{3}$ Onpose $G(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)dt$. Établir que $G(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{2x} + \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$. En déduire l'existence de $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)$. On admettra que $L = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

$\boxed{4}$ Déterminer alors une constante $\boxed{D}$ telle que $a_n \sim Dn^{-3/2}$.

$\boxed{5}$ Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

SUJET 5

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit la suite de points (z_n) de la façon suivante : $z_0 = 1$, et le triangle $0z_nz_{n+1}$ ***rectangle*** en z_n, est orienté dans le ***sens direct***, avec $|z_{n+1} - z_n| = 1$ [figure ci-contre]. La réunion des segments $[z_n, z_{n+1}]$ constitue donc une ligne polygonale infinie L de forme spirale.



$\boxed{1}$ Calculer $\boxed{|z_n|}$.

$\boxed{2}$ Montrer que le nombre réel $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{\sqrt{k}}$ est un argument possible pour le nombre complexe z_n, $n\geq 1$.

$\boxed{3}$ (3a) Déterminer la ***nature*** de la série de terme général $u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \arctan(n^{-1/2})$.

(3b) Établir l'***existence*** d'une constante réelle C telle que $\alpha_n = 2\sqrt{n} - C + O\left(n^{-1/2}\right)$.

(3c) Démontrer que cette constante C est ***strictement positive***.

$\boxed{4}$ On parcourt la ligne polygonale L dans le sens direct à partir de z_0. Montrer que l'on rencontre la demi-droite $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ en une infinité de points, que l'on appellera successivement $M_0 (= z_0)$, M_1, M_2, ..., M_k, ... L'unique arête de la ligne polygonale L qui contient le point M_k, $k\geq 1$, est désignée par $\left]z_{v(k)-1}, z_{v(k)}\right]$. Montrer que $v_k \sim k^2\pi^2$ quand k tend vers l'infini.

$\boxed{5}$ Plus précisément, établir que $v(k) = k^2\pi^2 + kC\pi + \beta(k)$ où $\beta(k)$ désigne une suite ***bornée***.