MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien; on note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E et O(E) le groupe orthogonal de E; pour tout endomorphisme f, f^* désigne l'adjoint de f et, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note $p_{[\ \| F]}$ la projection orthogonale de E sur F : $p_{[\ \| F]} \in L(E)$.

ø1 Soit $f = p_{[\ \| F]}{}^\circ g$ o— F est un sous-espace vectoriel de E et $g \in O(E)$.

(**a**) Préciser Ker f et Im f à l'aide de F et g.

(**b**) Montrer l'existence d'un unique sous-espace vectoriel F′ de E tel que :

$$p_{[\ \| F]}{}^\circ g = g^\circ p_{[\ \| (F')]}.$$

(**c**) Donner une expression simplifiée de $f^\circ f^{*\circ} f$.

ø2 Soit F un sous-espace vectoriel fixé de E, distinct de E et de {0}.

(**a**) Soit $g \in O(E)$; établir une condition nécessaire et suffisante pour que $p_{[\ \| F]}$ et g commutent.

(**b**) Soit G l'ensemble des $p_{[\ \| F]}{}^\circ g$ tels que $p_{[\ \| F]}{}^\circ g = g^\circ p_{[\ \| F]}$ avec $g \in O(E)$; montrer que $(G,{}^\circ)$ est un groupe isomorphe à un groupe connu; G est-il un sous-groupe du groupe linéaire de E ?

(**c**) Montrer que l'ensemble des $p_{[\ \| F]}{}^\circ g$ obtenu lorsque g décrit O(E) n'est pas stable par l'opération de composition.

ø3 Soit $f \in L(E)$ tel que $f^\circ f^{*\circ} f = f$.

(**a**) Établir que $f^\circ f^*$ est une projection orthogonale.

(**b**) Montrer que : $\forall x \in (\mathrm{Ker}\ f)^\perp,\quad \|f(x)\| = \|x\|$.

(**c**) En déduire l'existence d'un sous-espace vectoriel F de E et d'une application $g \in O(E)$ tels que : $f = p_{[\ \| F]}{}^\circ g$.

Exercice 2

ø1 (**a**) Pour quels réels x la fonction $x \to f(x) = \int_0^{+\infty} [(t^x)/((1+t)^2)]\, dt$ est-elle définie ?

(**b**) Pour t > 0 fixé, développer en série entière en 0 la fonction $x \to [(t^x)/((1+t)^2)]$.

ø2 (**a**) Calculer $\int_0^1 (\ln t)^n\, dt$ pour tout n ∈ ¥.

(**b**) En déduire que pour tout n ∈ ¥ : $[n!/4] \leq \int_0^1 [(|\ln t|^n)/((1+t)^2)]\, dt \leq n!$.

ø3 (**a**) Établir une relation simple entre $\int_0^1 [((\ln t)^n)/((1+t)^2)]\, dt$ et $\int_1^{+\infty} [((\ln t)^n)/((1+t)^2)]\, dt$.

(**b**) Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

ø4 On pose dans cette question x = [1/2p], p ∈ ¥* et l'on veut calculer $\int_0^{+\infty}$[($t^{1/2p}$)/($(1+t)^2$)] dt.

On rappelle que pour ω ∈ £\ ¡ fixé, la fonction u→[1/(u–ω)] admet pour primitive sur ¡ la fonction u→ln|u–ω|+i arg (u–ω), o— arg (u–ω) désigne l'argument de u–ω strictement compris entre –π et π.

(**a**) Montrer que $\int_0^{+\infty}$[($t^{1/2p}$)/($(1+t)^2$)] dt = $\int_0^{+\infty}$[du/(1+u^{2p})]\cdotp

(**b**) En précisant les éléments de l'ensemble Ω, établir la décomposition en éléments simples sur £ :

$$\frac{1}{1+u^{2p}} = -\frac{1}{2p}\sum_{\omega \in \Omega}\frac{\omega}{u-\omega}\ \text{\cdotp}$$

(**c**) Montrer qu'en calculant $\int_0^{+\infty}$[du/(1+u^{2p})] la partie logarithmique s'annule.

(**d**) En posant α = $e^{\text{\hii}\pi/p}$, simplifier (1–α)$\sum_{k=-p}^{p-1}$k α^k et en déduire que :

$$\forall p \in ¥^*,\quad \int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,dt = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}\ \text{\cdotp}$$

ø5 Montrer que la fonction x→π x–f(x)sinπx est développable en série entière en 0 et en déduire que :

$$\forall x \in]-1,+1[,\quad \int_0^{+\infty}\frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt = \frac{\pi x}{\sin \pi x}\ \text{\cdotp}$$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et ([(→) || a],[(→) || b],[(→) || c]) une base de E que l'on ne suppose pas orthonormale; l'ensemble *R* = ¢[(→) || a]+¢[(→) || b]+¢[(→) || c] des combinaisons linéaires de ([(→) || a],[(→) || b],[(→) || c]) à coefficients entiers forme alors un sous-groupe de (E,+) appelé *réseau* engendré par ([(→) || a],[(→) || b],[(→) || c]).

ø1 Soit D une *droite réticulaire* de *R*, c'est-à-dire une droite vectorielle de E contenant au moins un vecteur non nul de *R*; établir l'existence dans D∩*R* de [(→) || u] = x[(→) || a]+y[(→) || b]+z[(→) || c] non nul tel que $x^2+y^2+z^2$ soit minimum et en déduire que D∩*R* = ¢[(→) || u].

ø2 Notant Δ = det ([(→) || a],[(→) || b],[(→) || c]) le produit mixte de ([(→) || a],[(→) || b],[(→) || c]), on pose :

$$\vec{A} = \frac{1}{\Delta}\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right),\qquad \vec{B} = \frac{1}{\Delta}\left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right),\qquad \vec{C} = \frac{1}{\Delta}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).$$

(**a**) Exprimer simplement le produit scalaire $(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} \mid \alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C})$.

(**b**) Montrer que $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$ forme une base de E.

ø3 Soit P un *plan réticulaire* de *R*, c'est-à-dire un plan vectoriel de E contenant au moins deux vecteurs linéairement indépendants de *R*; montrer l'existence d'un couple $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs linéairement indépendants de $P\cap R$ tels que $X^2+Y^2+Z^2$ soit minimum lorsque $\vec{u}\wedge\vec{v} = X\vec{A}+Y\vec{B}+Z\vec{C}$, et en déduire que $P\cap R$ = ¢$\vec{u}$+¢$\vec{v}$.

ø4 Dans ce qui suit, P désigne un plan réticulaire de *R*, comme défini ci-dessus.

(**a**) Établir l'existence d'un triplet (α,β,γ) de nombres entiers relatifs premiers entre eux et tels que, pour $\vec{w} = x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, on ait :

$[\vec{w} \in P\cap R] \Leftrightarrow [(x,y,z) \in$ ¢^{3} et $\alpha x+\beta y+\gamma z = 0]$.

(**b**) Étant donné un tel triplet (α,β,γ), on définit pour $k \in$ ¢ les plans affines P_k d'équations $\alpha x+\beta y+\gamma z = k$ dans la base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$; montrer que les $P_k\cap R$ définissent une partition de l'ensemble *R*.

(**c**) Exprimer la distance entre P_k et P_{k+1} à l'aide de $\vec{N} = \alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$.
