MATHÉMATIQUES

Problème

Notations

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E; l'ensemble des valeurs propres de f sera noté Sp (f) (spectre de f). Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel Ker $(f-\lambda Id)$ de E, Id désignant l'application identique de E.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les éléments propres de X sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice X.

- On note $\Pi_f(X) = \det(XId-f)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $\mathbb{R}^n$ rendu euclidien par le produit scalaire $\bullet$ défini par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad X \bullet Y = {}^tXY = \sum_{1\leq k\leq n} x_k y_k$$

où ${}^tX$ désigne la matrice transpoosée de X et où, grâce à une identification de $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des matrices réelles de taille (n,1) :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$; on note f^* l'adjoint de f, endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f(X) \bullet Y = X \bullet f^*(Y).$$

- On rappelle que $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |f(X) \bullet Y|$, $\quad \|f^*\| = \|f\|$ $\quad$ et $\quad \|f\|^2 = \|f \circ f^*\|$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A; dans ces conditions on note $\Pi_A(X) = \Pi_f(X)$ et $\|A\| = \|f\|$, d'où $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

- On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles A, c'est-à-dire telles que ${}^tA = A$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A \geq 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et ${}^tXAX \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$; alors $\|A\| = \max_{\lambda \in Sp(A)}(\lambda)$. On écrit $A > 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul (d'où $A \geq 0$).

- On appelle matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Pour toute application convexe f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et tous $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in I^n$ et $(t_1,t_2,\ldots,t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{1\leq k\leq n} t_k = 1$, on a :
$f(\sum_{1\leq k\leq n} t_k\, a_k) \leq \sum_{1\leq k\leq n} t_k\, f(a_k)$.

Partie I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} a_{i,i-1} = i-1 & \text{si} \quad 2 \leqslant i \leqslant n \\ a_{i,i+1} = i & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$$

les autres coefficients étant nuls; enfin u est l'endomorphisme canoniquement associé à A.

• 1 Montrer que la matrice A admet n valeurs propres distinctes.

• 2 On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à coefficients réels par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et, pour $n \geqslant 3$:

$$P_n(X) = \frac{X}{n-1} P_{n-1}(X) - \left(\frac{n-2}{n-1}\right) P_{n-2}(X).$$

Montrer que le polynôme caractéristique $\Pi_u(X)$ vérifie l'égalité suivante :

$$\Pi_u(X) = (n-1)!\,[X\,P_n(X) - (n-1)\,P_{n-1}(X)].$$

• 3 En déduire det A en fonction de l'entier n.

• 4 On note Co (A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

(**a**) Montrer que Co (A) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(**b**) Déterminer la dimension de Co (A).

Partie II

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D la matrice diagonale définie par $D = \operatorname{diag}(1,3,5,\dots,2n-1)$ soit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2n-3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

ainsi que la matrice B = D–A o— A est la matrice de la première partie. Soit q la forme quadratique de ¡ ^{n} dans ¡ définie par X→q(X) = ^{t}XBX.

ø1 Montrer que, pour tous n\mathrel > 2 et X ∈ ¡ ^{n}, on a ^{t}XBX = n x_n^2+$\Sigma_{1\text{\mathrel6i\mathrel6n}-1}$i $(x_i-x_{i+1})^2$.

ø2 En déduire le rang et la signature de la forme q.

ø3 *Application*. Soit $(u_n)_{n\,\in\,¥^*}$ une suite de réels telle que la série Σu_k^2 converge. On note :

$$U_n = \frac{\sum_{1\text{\mathrel6k\mathrel6n}} u_k}{n} \text{ \cdotp}$$

(**a**) Montrer que $\Sigma_{1\text{\mathrel6j\mathrel6n}} U_j^2$\mathrel62$\Sigma_{1\text{\mathrel6j\mathrel6n}} u_j\, U_j$.

(**b**) En déduire que la série ΣU_n^2 est convergente.

Partie III

Soient n\mathrel > 2, *B* la base canonique de ¡ ^{n}, une matrice S > 0 et le produit scalaire φ sur ¡ ^{n} défini par φ(X,Y) = ^{t}XSY.

ø1 Montrer qu'il existe une base *B*′ orthonormale pour le produit scalaire φ telle que la matrice de passage [*B*′:*B*] de *B* à *B*′ soit triangulaire supérieure, et vérifie S = ^{t}[*B*′:*B*]$^{-1}$[*B*′:*B*]$^{-1}$.

ø2 Montrer que det S est inférieur ou égal au produit \mathrel (Π) i $s_{i,i}$ des éléments diagonaux de S.

Partie IV

Soient n\mathrel > 2, et U = $(u_{i,j})$ > 0 une matrice dont on note $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ les n valeurs propres, distinctes ou non; on suppose qu'il existe une série entière $\Sigma b_k\, x^k$ de somme g(x) et de rayon de convergence R > 0 vérifiant b_k > 0 pour tout k ∈ ¥ et Sp (U) ⊂]0,R[. Enfin l'application (ln° g) est supposée convexe sur]0,R[.

ø1 (**a**) Montrer que la suite $\Sigma_{k=0}^{N} b_k\, U^k$ converge dans M_n(¡) vers une matrice g(U) > 0.

(**b**) Expliciter un majorant de det g(U).

ø2 (**a**) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale V = $(v_{i,j})$ telle que :

$$\forall i,\quad 1\text{\mathrel6i\mathrel6n},\qquad u_{i,i} = \sum_{1\text{\mathrel6k\mathrel6n}} v_{i,k}^2\, \alpha_k.$$

(**b**) Montrer que 0 < $u_{i,i}$ < R pour tout i entre 1 et n.

(**c**) Montrer, en utilisant l'inégalité de convexité rappelée dans le préambule, que :

$$\det g(U) \geq \prod_{1 \leq i \leq n} g(u_{i,i}).$$

(**d**) Retrouver de même le résultat de la question **III** ø2

Partie V

Soient $n \geq 2$ et U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $u_{i,i} = a$ pour tout i et $u_{i,j} = b$ pour $j \neq i$, avec $0 < a < b$. Soit enfin $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1+e^x$.

ø1 En écrivant $U = (a-b)\, I_n+J$, déterminer le spectre de U.

ø2 Montrer que la matrice U et la fonction g vérifient les hypothèses de la partie **IV**.

ø3 Montrer qu'il existe un polynôme R de degré 2 annulateur de la matrice U.

ø4 Exprimer U^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et l'exponentielle $\exp(U)$ en fonction de U et de I_n.

ø5 Encadrer $\det(I_n+\exp(U))$ en fonction de a, b et n.

ø6 Dans cette question, on suppose $n = 3$. Déterminer la nature de la quadrique d'équation ${}^tXUX = 1$ où X décrit $\mathbb{R}^3$.
