E25D

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 MP

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

Calcul de sommes de séries.

Soit p un nombre entier naturel non nul. On considère la série :

$$S_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}.$$

Le but de l'exercice est de calculer la somme de la série S_p en utilisant la somme de la série entière

$$T_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{pn+1}}{pn+1}, \text{ pour } x \text{ réel.}$$

1°. *Etude de la série entière T_p.*

(a) Donner la limite pour n tendant vers $+\infty$ de $\frac{1}{pn+1}x^{pn+1}$ selon les valeurs du réel x.

(b) En déduire le rayon de convergence R de la série entière T_p.

(c) Pour quelles valeurs de x la série de terme général $(-1)^n x^{pn}$ est-elle convergente? Pour ces valeurs de x, exprimer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{pn}$ à l'aide des fonctions usuelles.

(d) En déduire, à l'aide d'une intégrale, une expression sur $]-R, R[$ de $T_p(x)$.

Tournez la page S.V.P.

2°. *Une série alternée.*
Dans cette partie, x est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On considère la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{pn+1}(1 - x^{pn+1}).$$

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel y appartenant à $[0,1]$, on a l'inégalité :

$$-p + (pn+p+1)y^{pn+1} - (pn+1)y^{pn+p+1} \leq 0 \, .$$

(*indication :* On pourra étudier la fonction qui envoie y sur $-p + (pn+p+1)y^{pn+1} - (pn+1)y^{pn+p+1}$ sur $[0,1]$.)

(b) Montrer que la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0.

(c) Enoncer avec précision le théorème de convergence des séries alternées.
En déduire la convergence de la série $\sum u_n(x)$ et un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ à l'aide de ses sommes partielles.

(d) En déduire les inégalités :

$$\frac{p - (p+1)x + x^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \leq 1 - x.$$

3°. Montrer que $S_p = \int_0^1 \frac{1}{t^p+1}\, dt$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $(x|y)$.
L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est noté $F^\perp$.
On rappelle que l'application nulle est le seul endomorphisme auto-adjoint ϕ réalisant :

$$\forall x \in E, (\phi(x)|x) = 0.$$

Soit σ un endomorphisme de E. On note σ^* son endomorphisme adjoint.

1°. Soit σ une symétrie vectorielle. On note Inv_σ l'ensemble des invariants et Dir_σ la direction. On a donc $Inv_\sigma = \ker(\sigma - Id_E)$ et $Dir_\sigma = \ker(\sigma + Id_E)$.

(a) Ecrire les matrices des applications linéaires $\sigma - Id_E$ et $\sigma + Id_E$ dans une base de diagonalisation de σ. En déduire $Im\,(\sigma - Id_E)$ et $Im\,(\sigma + Id_E)$ à l'aide de Inv_σ et Dir_σ.

(b) Démontrer que $\ker(\sigma^* - Id_E) = Im\,(\sigma - Id_E)^\perp$ et $\ker(\sigma^* + Id_E) = Im\,(\sigma + Id_E)^\perp$. Justifier que σ^* est une symétrie dont on précisera l'ensemble des invariants et la direction.

2°. Soit f un endomorphisme auto-adjoint, défini positif, cette dernière hypothèse signifiant que pour tout vecteur non nul x de E, $(f(x)|x) > 0$.
On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des vecteurs x de E tels que $(f(x)|x) = 1$. On suppose que $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.
On veut démontrer que $f(Inv_\sigma) = (Dir_\sigma)^\perp$.

(a) Soit x un vecteur non nul de E. Déterminer un réel k tel que le vecteur kx appartienne à $\mathcal{Q}$.

(b) Démontrer que :

$$\forall x \in E, (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) = (f(x)|x) .$$

(c) En déduire que $\sigma^* \circ f = f \circ \sigma$.

(d) Soit y un vecteur de $f(Inv_\sigma)$. Démontrer que y est invariant par σ^*.

(e) Démontrer que $f(Inv_\sigma) = (Dir_\sigma)^\perp$.

3°. On admet le résultat général suivant :
Soit f un endomorphisme auto-adjoint, dont aucune valeur propre n'est nulle, et dont l'une au moins est strictement positive. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des vecteurs x de E tels que $(f(x)|x) = 1$.
Soit I un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe une symétrie σ dont l'ensemble des invariants est I, et qui vérifie $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ si et seulement si I et $f(I)^\perp$ sont en somme directe. Dans ce cas, la direction de la symétrie σ est $f(I)^\perp$.

(a) On illustre le résultat dans le cas où $n = 2$, et $\mathcal{Q}$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé du plan. Soit I une droite passant par l'origine recoupant l'ellipse en deux points A et B. Déterminer la direction de la symétrie par rapport à la droite I laissant globalement invariant l'ellipse $\mathcal{Q}$, et en donner une interprétation géométrique.

(b) Pour p un réel, $(\mathcal{Q}_p)$ est la quadrique de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + 4yz = p$ dans la base canonique. Déterminer la matrice (dans la base canonique) de la symétrie σ, distincte de l'identité, laissant globalement invariante chaque quadrique $(\mathcal{Q}_p)$, et laissant fixe chacun des vecteurs $(1, 1, (p-1)/4)$, p variant dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on considère a un nombre réel non nul.
On note $sign$ la fonction qui associe 1 à un réel strictement positif, -1 à un réel strictement négatif, et 0 au réel 0.

1°. *Egalité de deux fonctions*
Pour t un nombre réel fixé, on définit les deux fonctions F_t et G_t sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$F_t(B) = \int_{-B}^{B} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{a + i\omega} \quad \text{et} \quad G_t(B) = 2e^{-at}\left(\int_0^t e^{au} \frac{sin(Bu)}{u} du + \frac{1}{2} F_0(B)\right)$$

Tournez la page S.V.P.

(a) Montrer que F_t est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivée à l'aide de $\dfrac{e^{iBt}}{a+iB}$ et de $\dfrac{e^{-iBt}}{a-iB}$.

(b) Montrer que la fonction $\phi\ : u \mapsto \dfrac{sin(u)}{u}$, est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que la fonction G_t est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(d) Démontrer l'égalité sur $\mathbb{R}$ des deux fonctions F_t et G_t.

2°. *Calcul de limites.*
Soit t un nombre réel fixé.
On utilise les deux résultats suivants, qu'il est inutile de redémontrer :
(i) Pour toute fonction λ continue sur un segment $[b,c]$ de $\mathbb{R}$, $\int\limits_b^c \lambda(u)\sin(Bu)du$ tend vers 0 lorsque $B \to +\infty$.
(ii) La limite pour x tendant vers $+\infty$ de $\int\limits_0^x \frac{\sin(u)}{u}du$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

(a) Déterminer $\lim_{B\to+\infty} \int\limits_0^t e^{au}\frac{sin(Bu)}{u}du$ en montrant au préalable son égalité avec la limite de $\int\limits_0^t \frac{\sin(Bu)}{u}du$ pour $B \to +\infty$.

(b) Montrer que la limite pour $B \to +\infty$ de $F_0(B)$ est $\pi sign(a)$.

(c) Montrer que la limite pour $B \to +\infty$ de $F_t(B)$ est $\pi e^{-at}[sign(a) + sign(t)]$.

3°. *Une formule d'inversion.*
On définit la fonction x par $x(t) = e^{-a|t|}$, et la fonction H_x par $H_x(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$, pour ω réel.

(a) Etudier, selon les valeurs du réel a, l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto x(t)e^{-i\omega t}$. En déduire l'ensemble de définition de la fonction H_x suivant les valeurs de a.

(b) Expliciter, en cas d'existence, la valeur de $H_x(\omega)$.

(c) Montrer que pour tout réel t, la fonction $\omega \mapsto \dfrac{2ae^{i\omega t}}{a^2+\omega^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Démontrer à l'aide du résultat du **2°(c)** la formule d'inversion : $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega$.
En préciser les conditions de validité.