e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 1

Filière PC

durée 3 heures

***Nota** : Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

*Dans cette épreuve **comme dans toutes celles qui suivront**, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

---

1) a) Calculer le volume et la somme des aires des faces d'un tétraèdre régulier dont les côtés ont a pour longueur.

b) Résoudre les mêmes questions pour un octaèdre régulier (dont les sommets sont les centres des faces d'un cube).

---

2) a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle U d'ordre n dont les éléments $u_{i,j}$ sont nuls sauf pour les n éléments $u_{n-k,k+1} = 1$ pour $0 \leqslant k < n$ (on pourra distinguer selon que $n = 2m$ ou $n = 2m+1$). Est–elle diagonalisable ? Que peut–on dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice canonique est U ?

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} U & I \\ I & U \end{pmatrix}$ d'ordre $2n$. Est–elle diagonalisable ?

3) Construire un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 à l'aide de deux tangentes au cercle centré au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ passant par le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ dans un repère orthonormé d'un plan euclidien.

---

4) Donner une représentation paramétrique et tracer l'ensemble des projections orthogonales de l'origine sur les tangentes à l'ellipse d'équation cartésienne

$$9\,(x-7)^2 + 49\,y^2 = 441.$$

---

5) Déterminer les couples de polynômes (P, Q) de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant l'égalité

$$\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = 1.$$

---

6) Calculer la dimension et donner une base de l'ensemble des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P = 0$.

---

7) a) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que l'on peut trouver au moins un automorphisme ω tel qu'il existe un projecteur p vérifiant $u = p \circ \omega$ (on pourra pour cela commencer par déterminer l'image de p).

b) Si $n = 3$ et si E est muni d'une structure euclidienne, peut-on choisir pour ω une isométrie et pour p un projecteur orthogonal ?

c) Montrer grâce à un opérateur linéaire classique sur les polynômes que le résultat du a) ne s'étend pas au cas de l'espace $E = \mathbb{R}[X]$.